

既知条件の不確定性を考慮した逆解析

吉田郁政*・星谷 勝**

既知条件が不確定性を有する場合の逆解析の定式化を提案し、弾性床上の梁モデルの逆解析を行いその有効性を示した。また、モデルパラメタの事前情報の不確定さに応じて、未知量、不確定既知量、確定既知量の使い分けが有効であることを示した。提案手法は確率論に基づいており、モデルパラメタの信頼性は共分散行列で表される。これに誤差伝播の法則を適用することにより、観測情報によって改良されたモデルを用いた応答解析結果の信頼性の向上を定量的に評価できることを示した。

Key Words : probabilistic back analysis, uncertainty of known parameters, reliability of estimation

1. はじめに

逆解析に関する既往の研究では既知条件は真値が与えられるとしている場合が多いが、実際問題への適用を考える場合、既知条件も何らかの不確定性を有していると考えた方が自然である。その不確定性が小さければ問題はないが、ある程度大きい場合は推定結果に影響を与えることになる。筆者らの提案する確率論に基づく逆解析¹⁾では不確定性を有するパラメタ全てを未知量とする事が可能であり、未知数が観測数の数を上回っても逆解析を行うことができる。しかし、問題によっては未知数が膨大になり数値計算が困難になる場合も考えられる。そこで、既知条件の不確定性を考慮できる逆解析の定式化を提案する。提案する手法を用いて弾性床上の梁モデルの逆解析を行い、提案手法の有効性及び既知条件の不確定性が逆解析に与える影響について議論する。

2. 定式化とその解法

未知量について観測を行う以前の平均 \bar{x} 、共分散マトリックス M (事前情報) が与えられると仮定する。また、観測情報は次の形で与えられるとする。

$$z = H(x) + v \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 x : 未知量ベクトル
 z : 観測量ベクトル
 $H(x)$: 観測量に対応する計算値ベクトル
 v : 観測量誤差のベクトル

この時の最適な推定値 \hat{x} は $P(x/z)$ を最大にすると考えられる。 $P(x/z)$ はベイズの定理より次式で求められる。

$$P(x/z) = P(x)P(z/x) / P(z) \dots\dots\dots (2)$$

$P(x)$ は平均 \bar{x} 、共分散マトリックス M に従う正規分

布、 $P(z/x)$ も平均 $H(\bar{x})$ 、共分散マトリックス R に従う正規分布であり、 $P(z)$ は正規分布ではないが x に無関係であることから、 $P(x/z)$ を最大にする x は次の目的関数 J を最小化する。

$$J = \{ (x - \bar{x})^T M^{-1} (x - \bar{x}) + (z - H(x))^T R^{-1} (z - H(x)) \} / 2 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 \bar{x} : 未知量の事前の平均値ベクトル
 M : 未知量の事前の共分散マトリックス
 R : 観測量誤差の共分散マトリックス

式 (3) を誘導する際に、未知量と観測量誤差は正規分布に従い両者は独立であることを仮定している。以上は文献 1) で誘導した内容の要約である。

次に、既知条件を確定的に扱えない場合の目的関数を誘導する。確定的に扱えない既知量ベクトルを y とすると、観測条件を表す式 (1) は次のように表される。

$$z = H(x, y) + v \dots\dots\dots (4)$$

y の平均値ベクトルを \bar{y} とし、 $y = \bar{y} + w$ とおいて式 (4) に代入して、 w に関してテーラー展開を行い 1 次までの近似を考えると次の式が得られる。

$$z = H(x, \bar{y}) + r \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $r = H_y(x, \bar{y}) w + v$

$$H_y(x, \bar{y}) = \partial H(x, \bar{y}) / \partial y|_{y=\bar{y}}$$

一般に r は x の関数となるが、近似的に次式が成立し x によらないと仮定する。

$$r = H_y(\bar{x}, \bar{y}) w + v \dots\dots\dots (6)$$

この仮定の近似の程度は観測量と未知量の非線形性の強さと事前情報の平均値と真値との隔たりによって決まる。例えば、観測量と未知量が線形関係にあれば、 r は x に依らなくなり厳密になる。

w が x に独立な正規分布とすると、 r も x に独立な正規分布となり、観測量と未知量の関係を表す式 (1) の観測量誤差 v が r に変わるだけで、これまでの議論が全

* 正会員 東電設計 (株) 地中線土木部課長代理 (〒110 東京都台東区上野 3-3-3)
 ** 正会員 Ph. D 武蔵工業大学教授 土木工学科

て成立する。従って、既知条件を不確定性を考慮した逆解析の目的関数は、式(3)と同じ形で与えられ、 R を R^* に変えるだけでよい。 R^* は r の共分散マトリックスを表しており、 v と w が独立であることを仮定すると、次式で求められる。

$$R^* = R + H_y(\bar{x}, \bar{y}) R_w H_y(\bar{x}, \bar{y})^T \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 R_w : w の共分散マトリックス

目的関数が決定されればあとは目的関数の最小化問題になり、最適化手法あるいは非線形最小二乗法と呼ばれる共役勾配法、DFP法、Powell法などの多数の方法²⁾で解くことができる。ここでは、式(3)に示した目的関数についてのGauss-Newton法による解法¹⁾を示す。式(8)、(9)を x が収束するまで繰り返すことによって、目的関数の最小点(正確には極小点)を求めることができる。

$$x_{i+1} = x_i + P_{x_i} (H_{x_i}^T R^{-1} (z - H(x_i)) + M^{-1} (\bar{x} - x_i)) \dots \dots \dots (8)$$

$$P_{x_i} = (H_{x_i}^T R^{-1} H_{x_i} + M^{-1})^{-1} \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 $H_{x_i} = \partial H(x) / \partial x|_{x=x_i}$

収束値に対する P_{x_i} は x の事後の共分散マトリックスを近似的に表している。

3. 数値計算例

例題として、図-1に示す弾性床上の梁モデルを考える。梁の曲げ剛性は一様、地盤ばねについては10のブロックに分け、各ブロック内で一様とした。真値を用いた順解析の結果得られた変位を同図に示す。 EI 及び外力 f_1, f_2 の事前情報は、表-1に示す平均と標準偏差が与えられているとする。地盤ばね kg の事前情報は、平均 1.0×10^4 (tf/m²)、標準偏差 1.0×10^1 (tf/m²)、地盤ばね間は無相関とする。事前情報による順解析の結果を図-2に示す。推定変位や断面力の平均に加え、その±標準偏差も示した。変位や断面力の共分散マトリックス Q は誤差伝播の法則³⁾として知られる次式によって求めることができる。

$$Q = ASA^T \dots \dots \dots (10)$$

A は変位あるいは断面力を不確定なパラメタで偏微分して求まるマトリックス、 S は不確定なパラメタの共分散マトリックスである。図中には真の変位及び断面力も示した。事前情報より推定された値と真の値は一致していないが、推定値の±標準偏差の範囲内には真の値がおさまっている。

次に、逆解析によって地盤ばねの推定を行う。観測量は図-1に示した観測点と基準点の相対変位とし、観測量誤差の標準偏差は 10^{-4} mで、誤差間に相関はないとした。式(8)、(9)における H_{x_i} は例題に対して次式で求めた。

表-1 事前情報と真値

	事前情報		真値
	平均	標準偏差	
曲げ剛性EI	1.0×10^6	1.0×10^4	1.01×10^6
外力 f_1 (tf/m)	200	20	180, 190, 210, 200
外力 f_2 (tf/m)	200	100	120

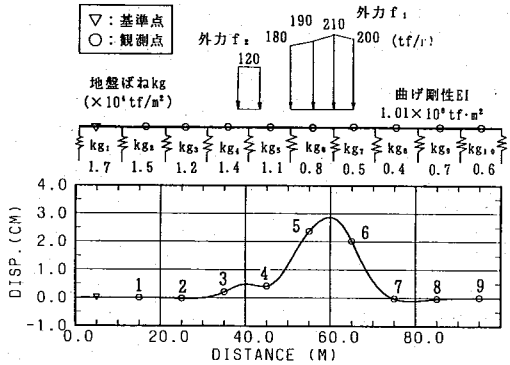


図-1 弾性床上の梁モデルと変位図
変位図中の番号は観測点番号

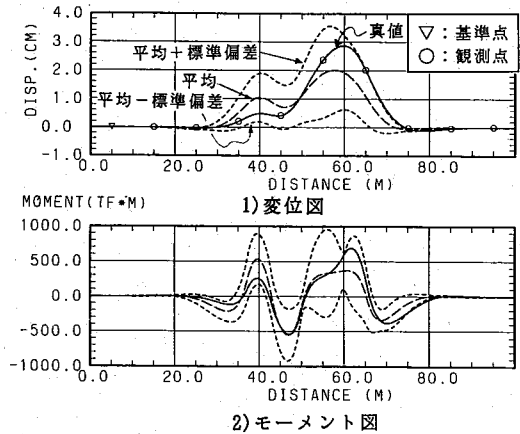


図-2 事前情報による順解析結果

$$H_{x_i} = TK^{-1}(-K'u + f) \dots \dots \dots (11)$$

ここで、 T は全節点変位から観測量を算定する行列、 K は剛性マトリックス、 u ($=K^{-1}f$)、 f は変位、外力ベクトルである。また、 K' 、 f' は未知量 x で微分したことを表す。

表-2に示す4ケースの逆解析を行った。ケース1では地盤ばね、外力、曲げ剛性の全てを未知量とした。表-1に示したように、曲げ剛性の標準偏差は 10^4 、変動係数にして1%と小さく、これは事前に十分な情報があり確定的な既知量に近いことを意味する。実際に曲げ剛性を未知量としても既知量としても結果は変わらない。

ケース2では、外力 f_1 、曲げ剛性を確定既知、ケース

表-2 逆解析の条件

	地盤ばね	外力 f_2	外力 f_1	曲げ剛性
ケース1	未知	未知	未知	未知
ケース2	未知	未知	確定既知	確定既知
ケース3	未知	確定既知	確定既知	確定既知
ケース4	未知	不確定既知	確定既知	確定既知

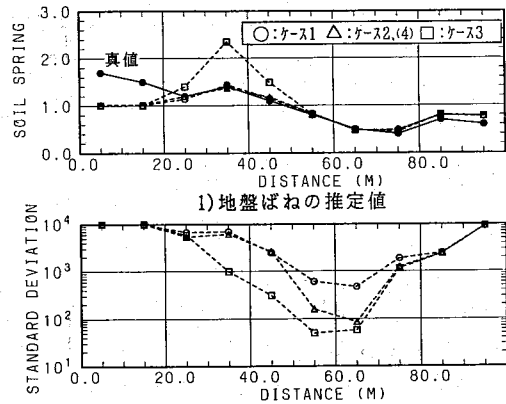


図-3 逆解析における未知条件と既知条件

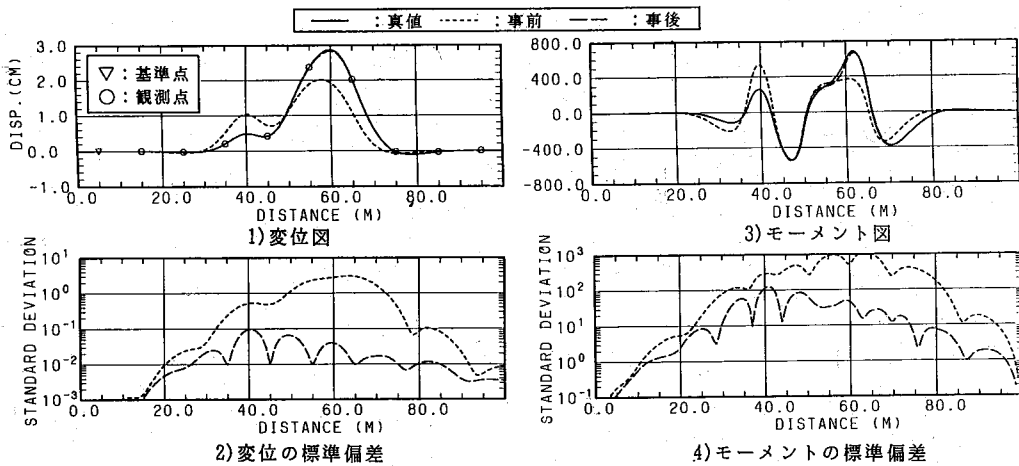


図-4 逆解析結果による変位及びモーメント ケース1 (地盤ばね, 外力 f_1 , f_2 , 曲げ剛性を未知)

3では f_2 も確定既知とした。確定既知とした場合には表-1に示した事前の平均値、すなわち真とは異なる値を確定的に与えた。ケース4では外力 f_2 を不確定既知すなわち、その不確定性も考慮した前述の定式化に従って、逆解析を行った。

逆解析によって推定された地盤ばねとその事後の標準偏差を図-3に示す。ケース2と4は推定値、標準偏差ともほとんど同じ結果が得られたので、図にはケース2だけを示した。ケース1, 2, 4は、感度の無い両端を除けばほぼ真値が推定されている。ケース3では、外力 f_2 の真値が120 tf/mであるのに200 tf/mとして確定的に扱ったため、25mから45m付近の地盤ばねは正しく推定されていない。それにもかかわらず、事後の標準偏差は他のケースに比べ小さい、すなわち、推定の信頼度が高いと評価しているという好ましくない結果となっている。ケース4では、外力 f_2 を既知としているがそのばらつきも考慮しているため、正しく地盤ばねが推定されており、提案した方法が有効であることがわかる。事後の標準偏差も40m付近ではケース1とほぼ等しい。60

m付近ではケース2, 4の方がケース1より小さくなっているが、これは外力 f_1 を確定的に扱っているためである。

次に、逆解析により改良されたモデルにより、変位や断面力の推定を行う。ケース1の結果を図-4に示す。同図には真値及び事前情報による値も示す。事前情報による変位やモーメントは真値とかなり異なっているが、逆解析結果はほぼ真値と一致している。推定値の標準偏差も逆解析を行うことによって大幅に小さくなる、すなわち、推定値の信頼度が向上しており、変位では約2桁、モーメントでは約1桁標準偏差が小さくなっている。推定変位の標準偏差は、変位の観測点35, 45, 55, 65m地点で急激に小さくなり、観測量誤差の標準偏差10⁻² cmと一致している。ケース2の結果は特に示さないが、外力 f_1 の影響が強く表れる60m付近の標準偏差がやや小さい程度で、変位、断面力ともにケース1とほとんど同じ結果が得られた。ケース3による変位分布を図-5に示す。観測点では真値と一致しているが、 f_2 の影響が大きい40m付近ではずれが見られる。しかし、推定値

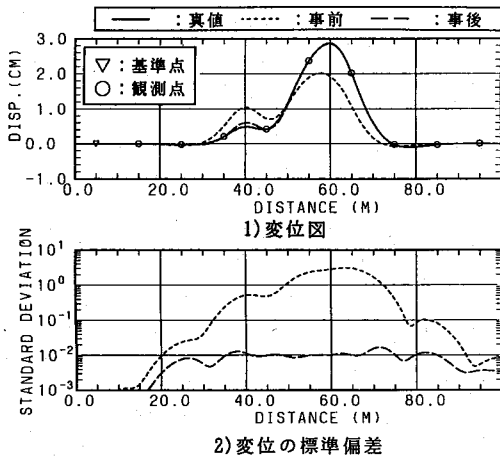


図-5 逆解析結果による変位
ケース3 (地盤ばねを未知, 他の条件は確定既知)

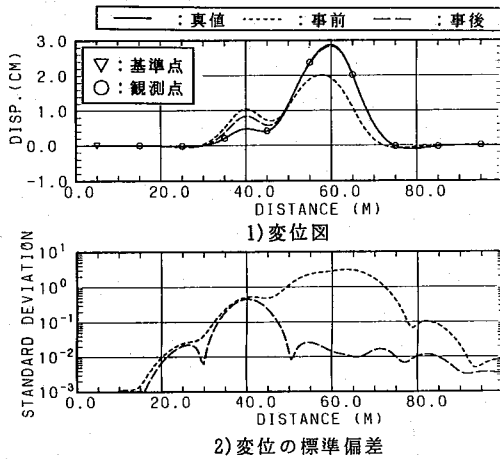


図-6 逆解析結果による変位
ケース4 (地盤ばねを未知, 外力 f_2 は不確定既知)

の標準偏差は、ケース1よりも小さく、推定値と真値とのずれと整合していない。図には示していないがモーメントについてもほぼ同様なことがいえる。ケース4の結果を示した図-6では、外力 f_2 を未知量として扱っていないため、逆解析による f_2 の見直しは行われておらず、

そのため f_2 の影響が大きい40 m付近では真値とは異なる値が推定されている。しかし、その標準偏差は事前情報による標準偏差と同程度であり、推定の信頼度が向上していないことを示している。すなわち、推定値と真値とのずれは推定値の標準偏差と整合している。

以上まとめると、地盤ばねの推定が目的である場合は、曲げ剛性 EI や外力 f_1 は確定既知条件としてよいが、外力 f_2 は不確定既知条件あるいは未知量とする必要があり、変位や断面力の推定が目的である場合は、外力 f_2 も未知量として扱う必要があるという結論が得られる。これらは与えられた条件下での結論であり、事前情報や観測点配置、観測量誤差に依存する事に注意を要する。

5. まとめ

本研究では、逆解析を確率論から解釈し、数値計算例を通して逆解析の信頼性について議論した。その結果は次のようにまとめることができる。

- 1) 既知条件に不確定性が存在する場合の確率論に基づく逆解析の定式化を提案した。
- 2) 弾性床上の梁モデルの数値計算例を行い、提案した既知量の不確定性を考慮した逆解析手法の有効性を示すとともに、事前情報の確からしさや解析の目的に応じた、確定既知、不確定既知、未知の条件の使い分けを議論した。
- 3) 逆解析により改良されたモデルを用いた順解析結果(応答解析)の信頼性の向上を定量的に評価できることを示した。

当研究は第2著者の指導のもとで第1著者が行ったものである。

参考文献

- 1) 吉田郁政・黒瀬浩公・福井史朗：確率論に基づく逆解析手法の基礎研究，土木学会論文集，第483号，pp. 61~68，1994。
- 2) 喜納秀明：システムの最適理論と最適化，コロナ社，1987。
- 3) 中川 徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1982。

(1994. 3. 17 受付)

BACK ANALYSIS CONSIDERING UNCERTAINTY OF KNOWN CONDITION

Ikumasa YOSHIDA and Masaru HOSHIYA

A formulation of probabilistic back analysis considering uncertainty of known condition is proposed, and the validity of the proposed method is demonstrated through the numerical example. Depending the uncertainty of the apriori information, model parameters should be classified into known parameters, known parameters with uncertainty or unknown parameters for an effective back analysis. The reliability of parameters determined by back analysis may be evaluated in the form of aposteriori covariance matrix, and the reliability of forward analysis with the apriori and aposteriori model can be evaluated quantitatively in a probabilistic way. Consequently, the improvement of reliability on forward estimation by back analysis may be evaluated quantitatively.