

# 時間更新を考慮した逆解析と観測点配置の評価指数

吉田郁政<sup>1</sup>・豊田耕一<sup>2</sup>・星谷 勝<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 東電設計株式会社 原子力土木部課長 (〒110 東京都台東区東上野 3-3-3)

<sup>2</sup>正会員 東電設計株式会社 耐震技術部

<sup>3</sup>正会員 武蔵工業大学教授 土木工学科

逆解析を考える上で、未知量の共分散行列は大変重要な役割を担っている。本研究ではその共分散行列に注目した2つのテーマについて論じる。複数の施工あるいは観測ステップからなる問題を考える場合、あるステップにおける逆解析の結果は次のステップの事前情報として引き継ぐことにより、複数ステップの観測情報から総合的に未知パラメタを推定することができる。一つ目のテーマとして、こうした時間更新を考慮した逆解析の方法を示し、時間更新に際して付加されるプロセスノイズの役割について検討を行った。また、2つ目のテーマとして未知量や応答値の共分散行列を基にした観測点配置の評価指数の提案を行い、数値計算例を示した。

**Key Words :** probabilistic back analysis, time update, process noise, sensor location

## 1. はじめに

地盤工学など様々な分野において逆解析は試みられており、カルマンフィルターを用いる方法<sup>たとえ(1), (2)</sup>、残差二乗和を最小にする方法<sup>たとえ(3), (4)</sup>などの方法が用いられているが、多くの場合、逆解析は目的関数の設定、その最小化という観点から解釈することができる<sup>5)</sup>。確率論から逆解析による未知量の推定精度を考えると、共分散行列という形で表現することができ大変有益である。例えば、複数ステップからなる問題に対しては、あるステップの逆解析結果の未知量とその共分散行列を次のステップの事前情報として引き継ぐことにより、複数ステップの観測情報から総合的に未知パラメタを推定することができる。また、未知パラメタの共分散行列を調べることにより、与えられた観測点配置や観測精度から逆解析の推定精度を論じることや<sup>6)</sup>、逆に良い推定精度を得るための観測点配置を議論することもできる。静的な地盤の変形問題を対象とした、複数の施工あるいは観測ステップからなる問題について確率論の立場から考えたフローを図-1に示す。同図における#1, #2, #3, #4を事前応答予測、逆解析、条件付き応答推定、時間更新と呼ぶことにする。実測データは時間方向に複数得られているのが一般的であり、図-1に示すように各施工ステップあるいは各観測ステップごとに逆解析を行うことができる。#1の事前応答予測は観測情報が与えられる前段階で行われる将来ステップの予測である。#2の逆解析は観測情報によるモデルパラメタの改良と考えることができ、#3の条件付き応答推定は観測情報により改良さ

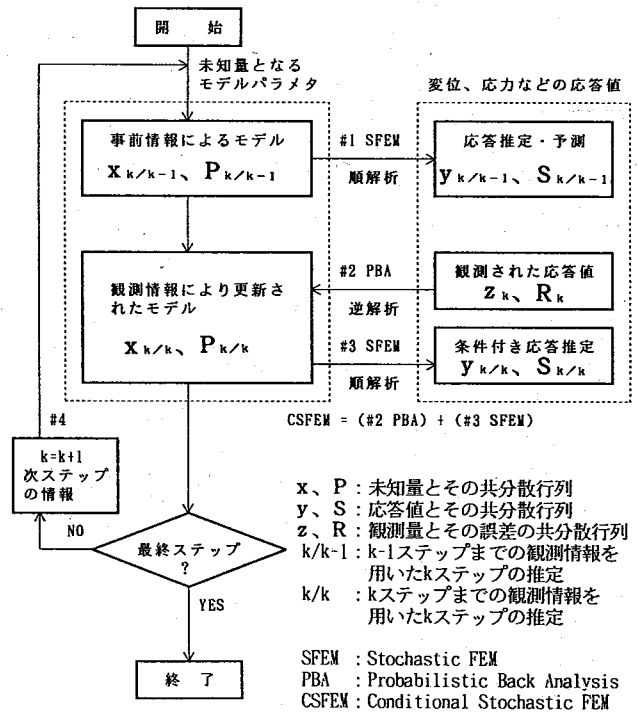


図-1 時間更新を考慮した検討の流れ

れたモデルパラメタを用いた推定であるから、観測情報を条件とした現ステップの推定と考えることができる。#2の逆解析や#3の条件付き応答推定で得られる共分散行列  $P_{k/k}$ ,  $S_{k/k}$  は、未知量の推定や条件付き応答推定の信頼性を表しており、その対角成分が小さいほど好ましい。従って、共分散行列の対角成分ができるだけ小さくなるような観測点配置が好ましいことになる。#4

の時間更新では、あるステップの逆解析結果が次のステップの逆解析の事前情報として引き継がれる。#2、#4はカルマンフィルターのアルゴリズムとも対応しており、静的な問題だけでなく振動問題の逆解析もこうした観点から解釈することができる<sup>7)</sup>。本研究では、未知パラメタの共分散行列に注目した2つのテーマについて論じる。1つ目のテーマは時間更新を考慮した逆解析であり、その基本的定式化を示すと共に時間更新に際して付加されるプロセスノイズの効果について、数値計算例を交えて論じる。2つ目のテーマとして、未知量や条件付き応答推定値の共分散行列を基に定義した観測点配置の評価指数の提案を行い、その数値計算例を示す。

## 2. 時間更新を考慮した逆解析

### (1) 定式化

図-1における#1の事前応答予測は式(1)、(2)で、

$$y_{k/k-1} = L(x_{k/k-1}) \quad (1)$$

$$S_{k/k-1} = L_{x_{k/k-1}}^T P_{k/k-1} L_{x_{k/k-1}} \quad (2)$$

#2の逆解析は式(3)、(4)で、

$$x_{k/k,i+1} = x_{k/k,i} + P_{k/k,i} \{ H_{x_{k/k,i}}^T R_k^{-1} (z_k - H(x_{k/k,i})) + P_{k/k-1}^{-1} (x_{k/k-1} - x_{k/k,i}) \} \quad (3)$$

$$P_{k/k,i} = (P_{k/k-1}^{-1} + H_{x_{k/k,i}}^T R_k^{-1} H_{x_{k/k,i}})^{-1} \quad (4)$$

#3の条件付き応答推定は式(5)、(6)で

$$y_{k/k} = L(x_{k/k}) \quad (5)$$

$$S_{k/k} = L_{x_{k/k}}^T P_{k/k} L_{x_{k/k}} \quad (6)$$

#4の時間更新は式(7)、(8)で表される。

$$x_{k/k-1} = F(x_{k-1/k-1}) \quad (7)$$

$$P_{k/k-1} = F_{x_{k-1/k-1}}^T P_{k-1/k-1} F_{x_{k-1/k-1}} + Q_k \quad (8)$$

ここで、

$y$ : 応答値ベクトル

$L(\cdot)$ : 応答値と未知量を関係付けるモデル

$S$ : 応答値の共分散行列

$x$ : 未知量ベクトル

$P$ : 未知量の共分散行列

$H(\cdot)$ : 観測量と未知量を関係付けるモデル

$z$ : 観測量ベクトル

$R$ : 観測量誤差の共分散行列

$F(\cdot)$ : 未知量のステップ間の変化を表すモデル

$Q$ : プロセスノイズの共分散行列

$$L_x = \partial L / \partial x, \quad H_x = \partial H / \partial x, \quad F_x = \partial F / \partial x$$

添え字の  $k$  は観測あるいは施工ステップを表しており、図-1でのループを表している。  $k/k-1$  は  $k-1$  ステップまでの観測情報を用いた  $k$  ステップの推定を、  $k/k$  は  $k$  ステップまでの観測情報を用いた  $k$  ステップの推定を表している。式(2)、(6)は誤差伝播の式として

知られている<sup>8)</sup>。式(3)、(4)の逆解析の式は条件付き確率の最大化の条件から誘導した目的関数<sup>5),9)</sup>をガウス・ニュートン法によって最小化する式であり、 $i$ は目的関数最小化のためのイタレーションを表している。最小化の方法は基本的には何を用いても良いが、ガウス・ニュートン法を用いる場合は、最小化のためのイタレーションを一回しか行わないとすると拡張カルマンフィルターの式が誘導される<sup>5)</sup>。カルマンフィルターでは、#2は観測更新アルゴリズム、#4は時間更新アルゴリズムと呼ばれている<sup>10)</sup>。式(2)、(4)、(6)は、未知量と応答値あるいは観測量の関係が線形の場合は厳密な式となるが、非線形関係の場合は近似の式となる<sup>11)</sup>。

通常の静的な地盤の変形問題のように、ステップ方向に未知量が定常な問題では式(7)、(8)の時間更新は次のように簡略化される。

$$x_{k/k-1} = x_{k-1/k-1} \quad (9)$$

$$P_{k/k-1} = P_{k-1/k-1} + Q_k \quad (10)$$

### (2) プロセスノイズの役割

プロセスノイズはステップ間に引き継がれる情報の信頼度を表しており、プロセスノイズを無限大とすれば、次のステップでの事前情報の標準偏差が無限大となり、引き継ぐべき情報がなにもない場合、すなわち事前情報がない場合と等しくなる。一方、プロセスノイズを0とすると前ステップでの逆解析の結果がそのまま次のステップの事前情報となる。次の3つの条件を満たす場合は、複数ステップの観測量を同時に用いる逆解析と時間更新を考慮した逆解析は厳密に一致する。

- 1) 未知量と観測量の関係が線形
- 2) 各ステップ間の観測量誤差が無相関
- 3) プロセスノイズを考慮しない ( $Q=0$ )

2ステップから成る問題について、同時に全観測量を用いる逆解析と時間更新を考慮した逆解析が厳密に一致することを示す。第1、2ステップで得られた観測量を  $z_1, z_2$ 、その観測量誤差を  $v_1, v_2$ 、未知量ベクトルを  $x$  とすると、条件1)、2)より同時に全観測量を用いる場合の観測方程式は次のように表すことができる。

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Hx + v = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$E[vv^T] = E \left[ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} (v_1^T \ v_2^T) \right] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} = R \quad (12)$$

$z_1, z_2$  を同時に用いて逆解析を行う場合の目的関数  $J_{12}$  は式(11)、(12)の関係より次のように求められる。

$$J_{12} = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T M^{-1} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx) \\ = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T M^{-1} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (z_1 - H_1 x)^T R_1^{-1} (z_1 - H_1 x)$$

$$+\frac{1}{2}(z_2-H_2x)^T R_2^{-1}(z_2-H_2x) \quad (13)$$

ここでは、 $\bar{x}$ ,  $M$ は事前情報の未知量の平均値ベクトルと共分散行列である。 $J_{12}$ を最小にする未知量 $x_{12}$ は、 $\partial J_{12}/\partial x=0$ の条件より次式で求められる。

$$x_{12}=\bar{x}+P_{12}H_1^T R_1^{-1}(z_1-H_1\bar{x})+P_{12}H_2^T R_2^{-1}(z_2-H_2\bar{x}) \quad (14)$$

$$P_{12}=(M^{-1}+H_1^T R_1^{-1}H_1+H_2^T R_2^{-1}H_2)^{-1} \quad (15)$$

次に時間更新を考慮した逆解析について示す。まず、第1ステップの観測量として $z_1$ が得られているとすると、そのときの目的関数 $J_1$ とそれを最小にする未知量 $x_1$ は次式で求められる。

$$J_1=\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T M^{-1}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2}(z_1-H_1x)^T R_1^{-1}(z_1-H_1x) \quad (16)$$

$$x_1=\bar{x}+P_1H_1^T R_1^{-1}(z_1-H_1\bar{x}) \quad (17)$$

$$P_1=(M^{-1}+H_1^T R_1^{-1}H_1)^{-1} \quad (18)$$

第1ステップの結果である $x_1$ ,  $P_1$ をプロセスノイズを考慮せずにそのまま次ステップの事前情報として引き継ぐとする。その場合、第2ステップの観測量 $z_2$ が与えられたときの目的関数と推定値 $J_{1-2}$ ,  $x_{1-2}$ は次式で求められる。

$$J_{1-2}=\frac{1}{2}(x-x_1)^T P_1^{-1}(x-x_1) + \frac{1}{2}(z_2-H_2x)^T R_2^{-1}(z_2-H_2x) \quad (19)$$

$$x_{1-2}=x_1+P_{1-2}H_2^T R_2^{-1}(z_2-H_2x_1) \quad (20)$$

$$P_{1-2}=(P_1^{-1}+H_2^T R_2^{-1}H_2)^{-1} \quad (21)$$

式(20), (21)に式(17), (18)を代入して整理すると次の関係が得られ、全観測量を同時に用いた逆解析と同じ結果が得られる。

$$x_{1-2}=\bar{x}+P_{12}H_1^T R_1^{-1}(z_1-H_1\bar{x})+P_{12}H_2^T R_2^{-1}(z_2-H_2\bar{x}) = x_{12} \quad (22)$$

$$P_{1-2}=(M^{-1}+H_1^T R_1^{-1}H_1+H_2^T R_2^{-1}H_2)^{-1} = P_{12} \quad (23)$$

順番を変えて第1ステップで $z_2$ が、第2ステップで $z_1$ が与えられる場合についても、当然のことながら同じ結果が得られる。2ステップ以上の問題に対してもそのまま拡張することができ、同時に全観測データを用いて解く場合と、複数のステップに分けて時間更新を考慮したアルゴリズムを用いて解く場合では、全く同じ推定値と事後の共分散行列が得られる。

次に単純な線形問題を例題として、プロセスノイズの役割について考える。図-2(1)に示すように $s-z$ 平面に10個のデータがある場合について、これらのデータから直線 $z=as+b$ を求めてみよう。 $z$ を観測量、 $v$ を

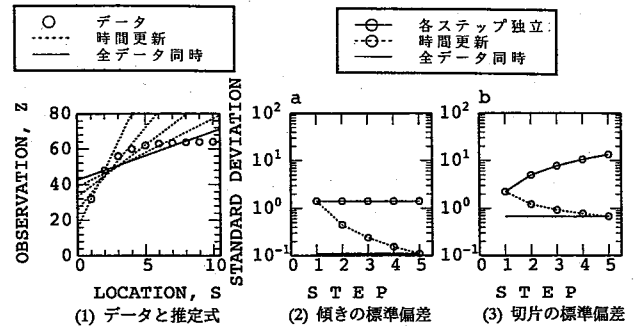


図-2 求められた回帰式と未知パラメータの標準偏差 プロセスノイズがない場合

観測量誤差、 $s$ を場所を表す説明変数、未知量ベクトル $x$ を直線の傾き $a$ と切片 $b$ とすると、次のように表すことが出来る。

$$z=Hx+v$$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z^T = (32.0 \ 48.0 \ 56.0 \ 60.0 \ 62.0 \ 63.0 \ 63.4 \ 63.7 \ 63.9 \ 64.0)$$

$$x^T = (a \ b) \quad (24)$$

観測量誤差の標準偏差が同じ大きさで誤差間は無相関、事前情報はなしとすると、式(3), (4)は通常の最小二乗法の式と一致し次のように簡略化される。

$$x=(H^T H)^{-1} H^T z \quad (25)$$

式(24)に示したデータに対して、式(25)より求めた直線を図-2(1)に実線で示す。以下、この場合を全データ同時に用いたケースと呼ぶことにする。

次に、データを $s$ 座標の小さな順に2個ずつの5ステップのデータに分けて考える。たとえば1, 2ステップのデータは次のように記述される。

$$H_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1^T = (32.0 \ 48.0), \quad z_2^T = (56.0 \ 60.0) \quad (26)$$

式(3), (4), (9), (10)による時間更新を考慮したアルゴリズムによって求めた各ステップごとの直線を図-2に破線で示す。このケースでは、時間更新の際にプロセスノイズは与えていないので、前述の3つの条件、1) 未知量と観測量の関係が線形、2) ステップ間の観測量誤差が無相関、3) プロセスノイズが0、を満たしている。そのため、5ステップ目の結果は全データ同時に用いた場合と全く同じ直線が求められ、その傾きや切片の標準偏差も完全に一致している。図には、参考のために、各ステップ独立に推定を行った場合の標準偏差も示した。

次にプロセスノイズを与える場合について考えてみよう。

う。1つの方法として、プロセスノイズは各ステップごとの事前情報を基に次のように定めるとする。

$$Q_k = cP_{k-1/k-1} \quad (27)$$

この場合、 $k$ ステップにおける事前情報の共分散行列は次のように与えられる。

$$P_{k/k-1} = Q_k + P_{k-1/k-1} = (1+c)P_{k-1/k-1} \quad (28)$$

従って、事後の共分散行列は次のように求められる。

$$\begin{aligned} P_{k/k} &= (P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} \\ &= \left( \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k-1} P_{1/0}^{-1} + \sum_{i=1}^k \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k-i} H_i^T R_i^{-1} H_i \right)^{-1} \\ &= \left( \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k-1} P_{1/0}^{-1} + \sum_{i=1}^k H_i^T R_i^{*-1} H_i \right)^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $P_{1/0}$ : 第1ステップにおける事前情報

$$R_i^* = (1+c)^{k-i} R_i$$

具体的に考えてみると、1ステップ前の観測量誤差の共分散行列を  $(1+c)$  倍に、2ステップ前を  $(1+c)^2$  倍にしたことになり、共分散行列の逆行列は重み行列として働いているので、1ステップ前の情報の重みを  $1/(1+c)$  に、2ステップ前を  $1/(1+c)^2$  としていることに相当する。一般的に述べると  $n$  ステップ前の観測情報の重みを  $1/(1+c)^n$  倍していることになる。つまり、プロセスノイズを与えると新しいデータを重要視した推定を行うことになり、 $c$  を大きくすればする程新しいデータの重みが相対的に大きくなる。 $c$  を無限大にするとこれまでの議論から明らかなように、各ステップにおいて事前情報がない場合の推定となる。

前述の例題について、式(27)の形式でプロセスノイズを与え、 $c=0.2, 1.0, 5.0$ とした場合についての計算結果を図-3に示す。 $c=0.2$ の場合にはプロセスノイズを考慮していない場合と比較的傾向が似ている。5ステップ目で得られた直線は、全てのデータを同時に用いて求めた直線とほぼ等しい。また、未知量の標準偏差も5ステップ目の結果は、全てのデータを用いた場合と近い値となっている。 $c=1.0, 5.0$ と大きくするに従い新しいデータを重視した推定となり、得られる直線はデータに対する接線に近い直線になってくる。未知量の標準偏差も各ステップ独立に解いた場合と近い値となっている。以上、まとめると、プロセスノイズを  $0(c=0)$  とすると全てのデータを同時に用いる場合と等しくなり、プロセスノイズを無限大( $c=\infty$ )とすると各ステップ独立に観測情報だけから推定する場合と等しくなり、そして、 $0 < c < \infty$  のプロセスノイズを与えるとそれらの中間的挙動となることが分かる。

次にプロセスノイズを次式で与える場合について考える。

$$Q_k = qE, \quad E: \text{単位行列}, \quad q: \text{定数} \quad (30)$$

$q=0.1, 5.0, 10.0$ としてプロセスノイズを与えた場合

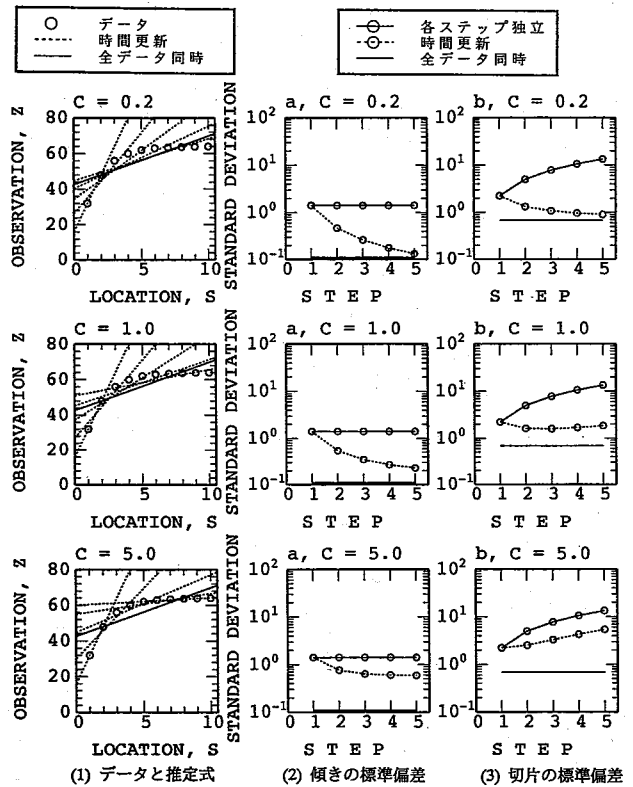


図-3 求められた回帰式と未知パラメタの標準偏差 プロセスノイズのレベル  $c=0.2, 1.0, 5.0$  の場合

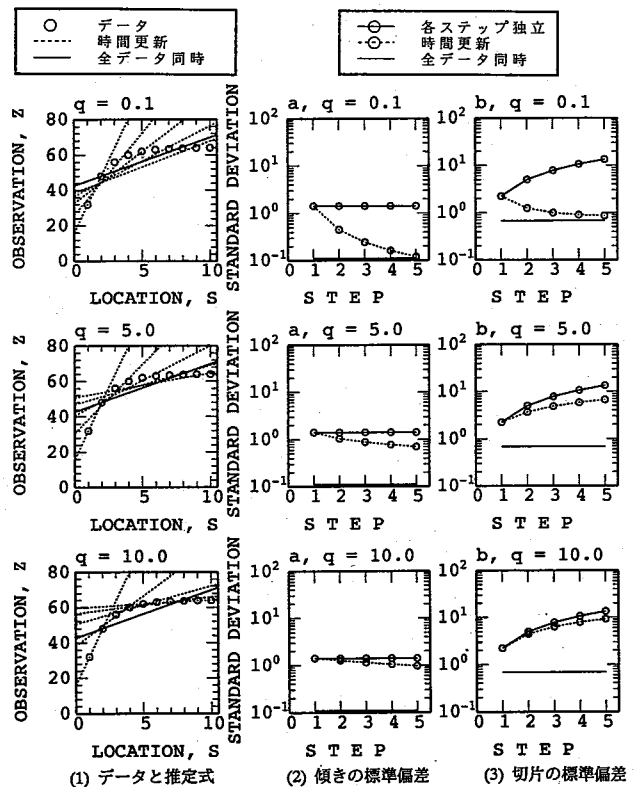


図-4 求められた回帰式と未知パラメタの標準偏差 プロセスノイズのレベル  $q=0.1, 5.0, 10.0$  の場合

について、同様の計算を行った結果を図-4に示す。プロセスノイズ ( $q$ ) が小さいと全データを同時に用いる

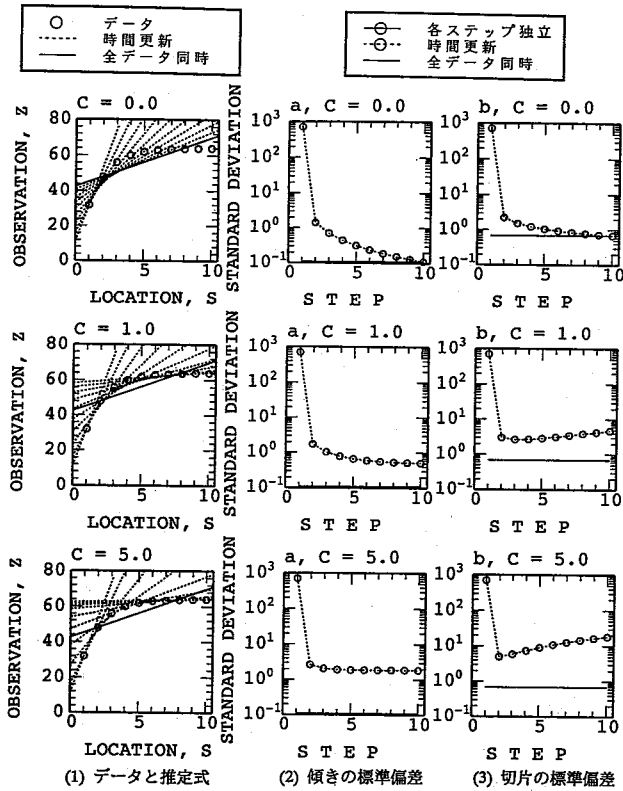


図-5 求められた回帰式と未知パラメタの標準偏差 プロセスノイズのレベル  $c=0.01, 1.0, 5.0$  の場合

場合と近い結果が得られ、大きくすると各ステップ独立に推定する場合と近い結果が得られた。式 (30) では単位行列に定数を乗じる形でプロセスノイズを与えているが、未知量ごとにプロセスノイズの大きさを変えたり、相関を持たせてもよい。このような形で与える場合は、式 (29) のような明解な関係は得られないが、プロセスノイズを大きくする程、新しいデータに重みをおく推定になるという定性的性質は変わらない。

以上は各ステップ独立に解ける問題であったが、次に時間更新を必要とする例題について示す。式 (24) の観測データを 10 ステップに分け、観測量が各ステップ 1 個ずつの問題について考える。この問題では未知量 2 個に対して観測量が 1 個なので、もはや各ステップ独立には解くことが出来ない。プロセスノイズなしの場合 ( $c=0$ )、式 (27) のタイプのプロセスノイズを採用し、 $c=1.0, 5.0$  の場合について計算を行った。その結果を図-5 に示す。第 1 ステップにおいても事前情報が必要となるが、標準偏差が大きい情報を与えたので、2 ステップ以降の推定には影響を与えていない。プロセスノイズを与えていない場合は、10 ステップ目で全データを同時に用いた場合と全く同じ推定値とその標準偏差が得られている。図-5 では各ステップ独立の場合の未知パラメタの標準偏差を示していないが、観測量 1 個ずつの場合には各ステップ独立に解くことが出来ず、その標準偏差

は無限大となる。プロセスノイズを与えた場合は、図-3, 図-4 と同じ傾向が見られ、 $c$  を大きくすることにより最新のデータに重みを置く推定となっている。

以上の例は未知量と観測量の関係が線形の場合であったが、非線形関係の場合もプロセスノイズの役割を同じように解釈できる。すなわち、プロセスノイズを 0 とすると古いステップと情報も新しいステップの情報も同じ重みで扱われることとなり、プロセスノイズを与えると最新のデータに重みをおいた推定となる。

プロセスノイズや観測誤差はモデル誤差と深い関連があり、図-1 のフローにおける #4 の時間更新に関わる誤差はプロセスノイズに、#2 の観測更新に関わる誤差は観測誤差に変換されると解釈することができる。以下に、プロセスノイズとモデル化誤差の関係について述べる。簡単のため、時間更新が線形の式で表わされ、時間更新の際のモデル化誤差が行列  $\Delta F$  で表されるとする。

$$x_{k/k-1} = (F + \Delta F)x_{k-1/k-1} \quad (31)$$

$$P_{k/k-1} = (F + \Delta F)^T P_{k-1/k-1} (F + \Delta F)$$

$$= F^T P_{k-1/k-1} F + F^T P_{k-1/k-1} \Delta F$$

$$+ \Delta F^T P_{k-1/k-1} F + \Delta F^T P_{k-1/k-1} \Delta F \quad (32)$$

式 (32) の右辺 2, 3, 4 項は、時間更新の際のモデル化誤差がプロセスノイズに変換された部分を表している。同様に、観測更新の際のモデル化誤差が観測誤差に変換されることも示すことができる<sup>12)</sup>。こうしたモデル化誤差を含んだプロセスノイズや観測誤差を具体的に評価することは、合理的な逆解析を行う上で極めて重要な課題であるが、理論的に評価していくことは一般には困難であり、実測データから帰納的に推定する必要があると考えている。この問題については、今後さらに研究を進めて行きたい。

### 3. 観測点配置の評価指数

既往の研究において、観測点配置の評価についていくつかの方法が提案されており、ヤコビアン行列を用いる方法<sup>13), 14)</sup>と事後の共分散行列を用いる方法<sup>15), 16)</sup>の 2 つに大別される。事後の共分散行列  $P_{k/k}$  は、式 (4) で与えられ、ヤコビアン行列、観測誤差の共分散行列、事前の共分散行列から求められる。それら 3 つの情報は、それぞれ観測点配置、観測量の精度、事前情報の信頼性を表すものであり、その結果、事後の共分散行列には多くの情報が総合的に含まれている。そこで、本研究では事後の共分散行列を用いて、観測点配置の評価を行うこととした。ヤコビアン行列は、未知量と観測量の関係が線形である場合には未知量の値に依らず一定であるが、非線形の場合は依存して変化する。したがって、観測点

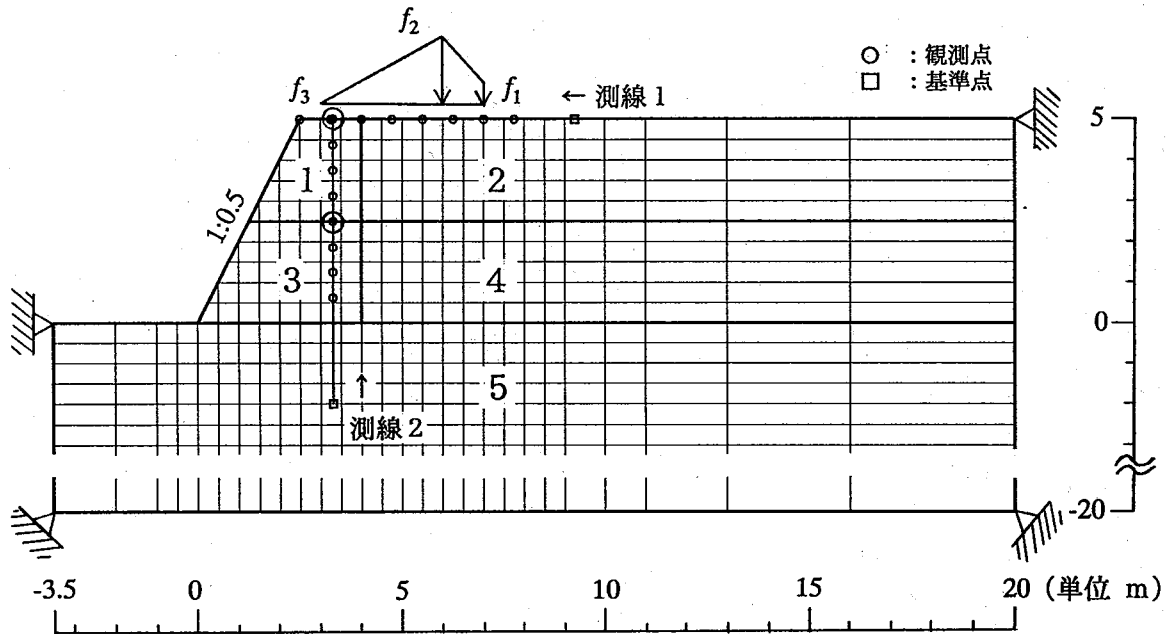


図-6 観測点配置の評価に用いた解析モデル

表-1 未知パラメタの平均値と標準偏差および観測点配置の評価指数

未知パラメタ	平均値 tf/m <sup>2</sup>	事前	事後 (測線 1)			事後 (測線 2)		
		標準偏差 tf/m <sup>2</sup>	標準偏差 tf/m <sup>2</sup>	変動係数	$I_{Mi}$	標準偏差 tf/m <sup>2</sup>	変動係数	$I_{Mi}$
$E_1$	500.	500.	237.	0.473	0.473	187.	0.374	0.374
$E_2$	1000.	1000.	398.	0.389	0.398	425.	0.425	0.425
$E_3$	500.	500.	240.	0.480	0.480	184.	0.367	0.367
$E_4$	1000.	1000.	437.	0.437	0.437	421.	0.421	0.421
$f_1$	10.	10.	6.66	0.666	0.666	8.47	0.847	0.847
$f_2$	30.	30.	12.2	0.407	0.407	13.2	0.440	0.440
$f_3$	0.	10.	5.78	$\infty$	0.578	3.54	$\infty$	0.354
$I_M$		1.0	0.484			0.441		
$I_{R-A}$ (領域 A)		1.0	0.417			0.331		
$I_{R-B}$ (領域 B)		1.0	0.489			0.265		

配置の検討に用いる未知量の値と逆解析で求められる値が大幅に変わらないことが前提条件となる。

図-6に検討に用いたモデルを示す。斜面の上部に分布荷重が作用しており、それに伴う水平方向の変形量が各観測点で観測されているとする。観測量誤差間に相関はなく、その標準偏差は0.1mmと仮定する。未知パラメタは分布荷重に関する3つのパラメタ $f_1, f_2, f_3$ と領域1~4の地盤のヤング率 $E_1, E_2, E_3, E_4$ の計7個とする。それ以外の条件、領域5のヤング率や各領域のポアソン比は既知とした。検討に用いた各未知パラメタの事前情報の平均値と標準偏差を表-1に示す。

観測点配置として図-6に示した測線1のみ、または測線2のみとした2ケースを考え、事後の共分散行列を求めた。表-1に2ケースで求められた各未知パラメタ

の事後の標準偏差および変動係数を示す。未知パラメタごとに推定精度の比較を行うと、未知パラメタ $E_2, f_1, f_2$ については、測線1の方が、未知パラメタ $E_1, E_3, E_4, f_3$ については、逆に測線2の方が推定精度がよいことが分かる。これらの情報だけでは、どちらが優秀な観測点配置であるか評価することは難しく、総合的に観測点配置の優秀を評価できる指標を考えたい。最も単純には各未知パラメタの事後の標準偏差の平均をとり、それを評価指数とする方法が考えられる。しかし、例題におけるヤング率と外力のようにオーダーが異なる標準偏差が混在する場合には、標準偏差の小さいパラメタの影響は評価指数に反映されにくいことになる。そこで、標準偏差について何らかの基準化を行うことが考えられる。その基準化に未知パラメタの平均値を用いると変動係数が

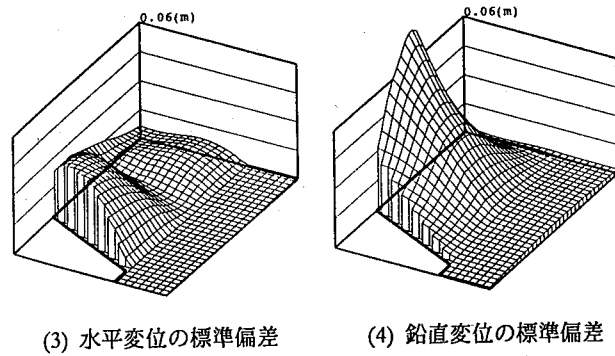
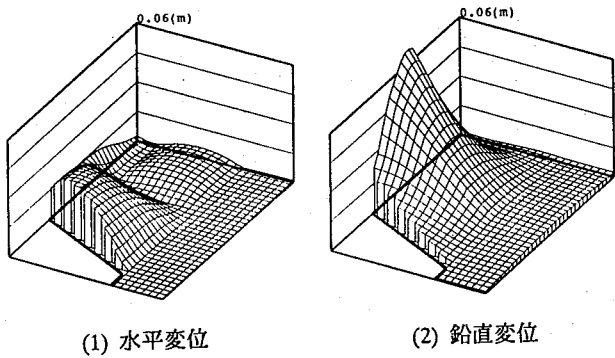


図-7 事前応答予測による変位分布とその標準偏差の分布

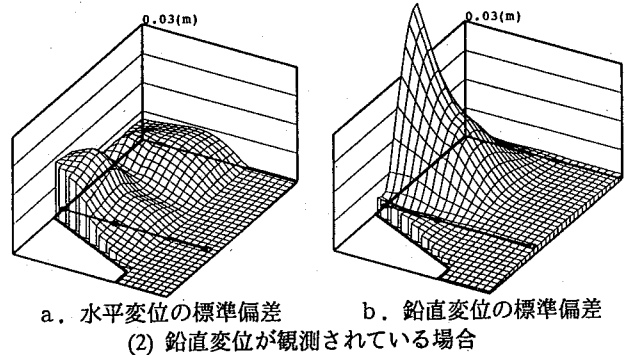
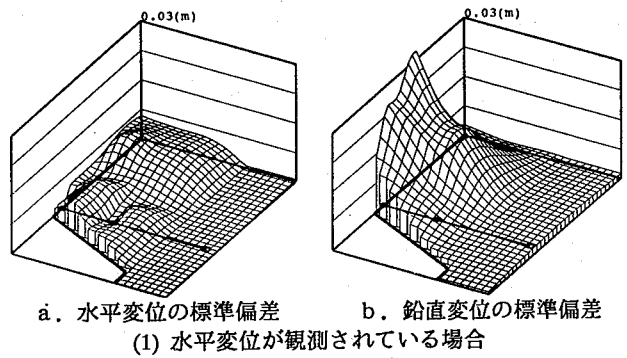


図-8 条件付き応答推定による変位の標準偏差の分布

求められることになるが、パラメタの持つ特徴として、変動係数が大きいものや小さいものがあるとやはり不都合が生じる。また、例題の  $f_3$  のように、平均が 0 となるパラメタに対しては変動係数は定義することができない。そこで、本研究では基準化に事前の標準偏差を用いることとした。その事前と事後の標準偏差の比の相乗平均を観測点配置の評価指数  $I_M$  と定義する。

$$I_M = \exp \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(I_{Mi}) \right] \quad (33)$$

ここで、 $n$  は未知量の数を、 $I_{Mi}$  は  $i$  番目の未知パラメタの事後の標準偏差を事前の標準偏差で基準化した量を表している。 $I_M$  は未知パラメタの信頼度の平均的な向上の程度を表しており、モデルの信頼性に注目しているのでサブスクリプト  $M$  を付けている。 $I_M$  は、0.0 から 1.0 の間の値をとり、値が小さい程、信頼性の向上が大きく優秀な観測点配置であることを示す。

これに対して、条件付き応答推定の信頼性に着目した評価指数も考えられる。つまり、未知パラメタの信頼性の向上に伴い、そのモデルを用いて算定した応答値の信頼性も向上することから、その程度によって評価指数を定義するのである。応答値の信頼性は、式 (6) により求めることができる。事前と事後の応答値の信頼性の変化について数値計算例を示す。表-1 に示した事前情報に基づいて算定した変位分布とその標準偏差の鳥瞰図を図-7 に示す。図-1 に示したフローでは #1 の事前応答予測に相当する。変位と標準偏差の分布形状はほぼ対

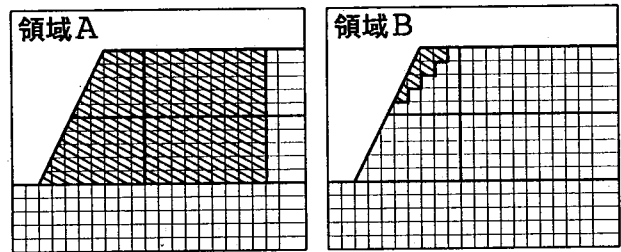


図-9 条件付き応答推定の信頼性の向上に着目した観測点配置の評価指数を算定する際に考慮した領域

応しており、変位が大きい場所では標準偏差も大きいことがわかる。観測点を図-6 の測線 2 上に◎で示した 2 個とした場合について、事後の標準偏差を求めその鳥瞰図を図-8 に示す。図-8 (1) では、水平変位が観測されている場合について示しており、a は水平変位の、b は鉛直変位の事後の標準偏差を示している。同様に図-8 (2) は鉛直変位が観測されている場合を示している。図-8 は図-1 のフローでは #3 の条件付き応答推定に相当する。水平変位を観測している場合は、事前と比べると水平変位の事後の標準偏差の分布形状が大きく変化し、観測点近傍で標準偏差が局所的に小さくなっている。一方、鉛直方向の標準偏差には大きな変化はない。鉛直変位を観測している場合には、逆に水平方向の図はあまり変わらないが、鉛直方向の図では観測点付近で小さくなっている。このように、変位、ひずみ、応力などの応答値の事前、事後の標準偏差を式 (2), (6) によって求め、その比を  $I_{Ri}$  として評価指数  $I_R$  を次のように定

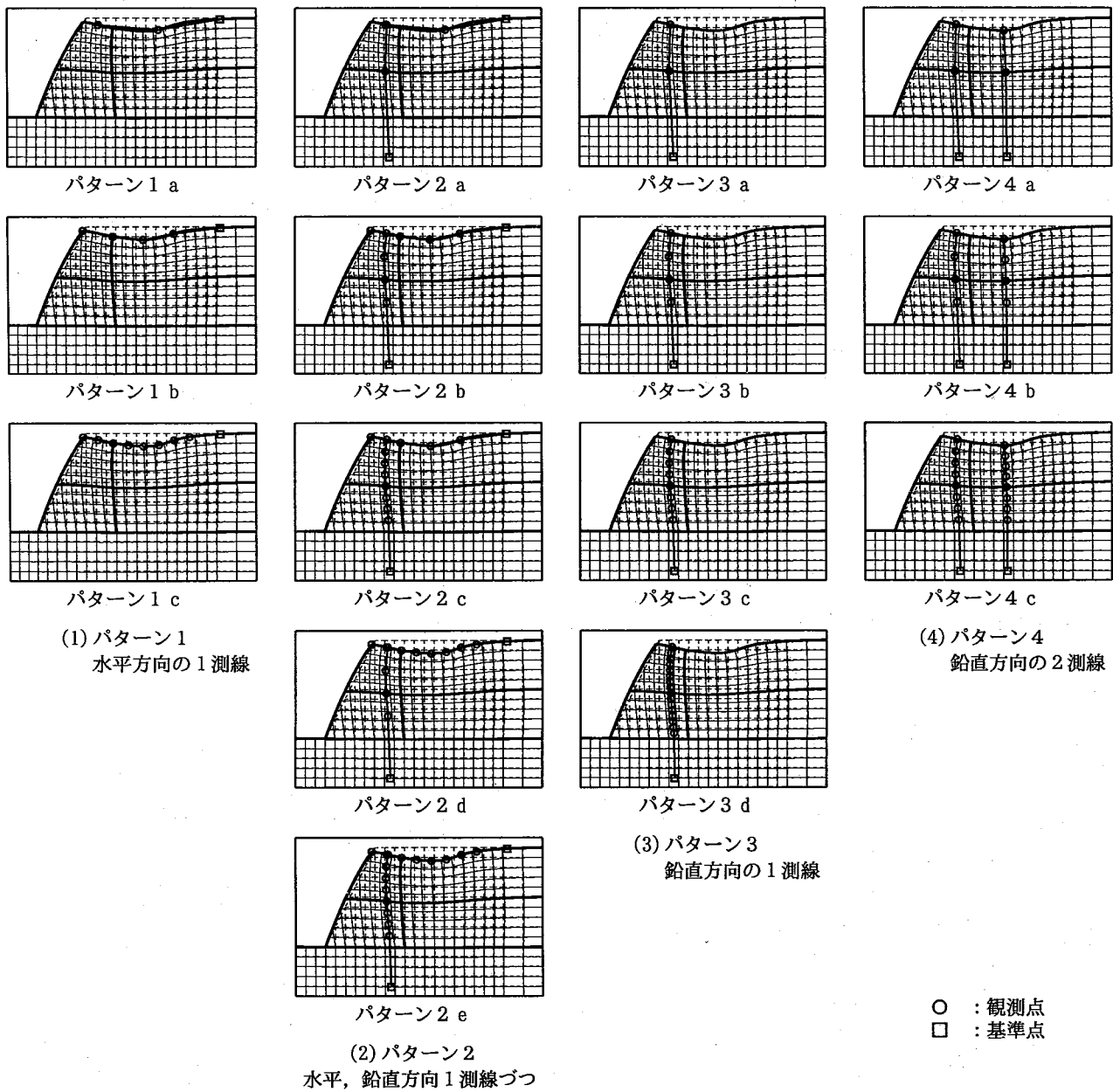


図-10 設定した観測点配置案

義する。

$$I_R = \exp \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(I_{Ri}) \right] \quad (34)$$

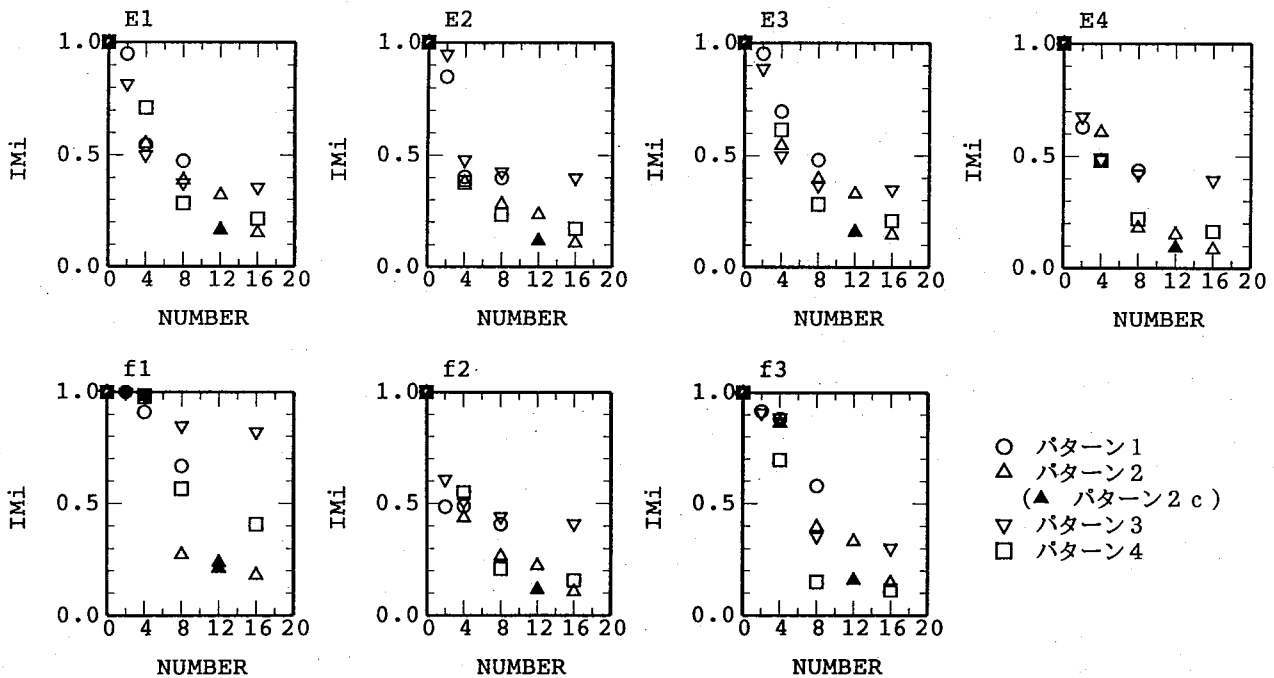
$n$ は考慮した応答値の数を表している。 $I_R$ も0.0から1.0の間の値をとり、値が小さい程、優秀な観測点配置であることを示す。

表-1に示した2ケースについて、 $I_M, I_R$ の算定を行った。 $I_R$ は図-9に示す領域A、あるいは領域Bの全要素の応力に注目して求めた。以下これを $I_{R-A}, I_{R-B}$ と記す。表-1の2ケースの比較では測線2の観測点配置の方が $I_M, I_{R-A}, I_{R-B}$ ともに評価指数が小さく、優れていることがわかる。

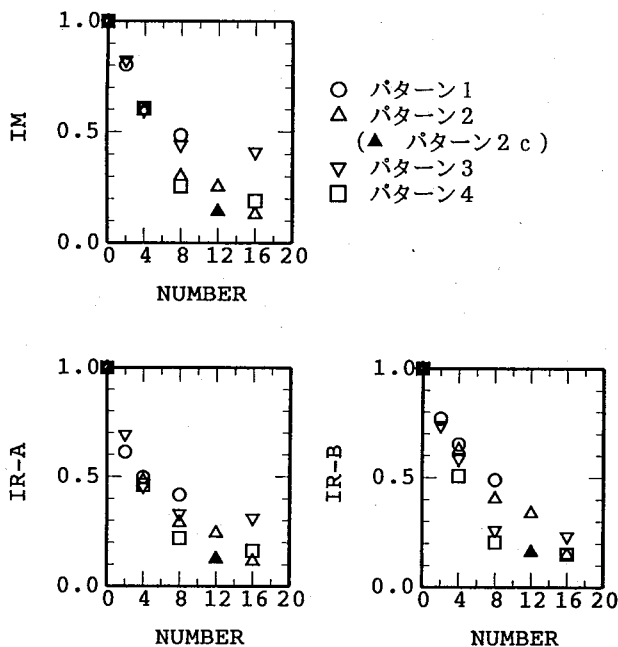
次に図-10に示す4種類の観測点配置パターンを考え、各測線上で観測点数を変えた15ケースの配置案を

設定し、それぞれについて評価指数の算定を行った。まず、未知パラメタごとの事前と事後の標準偏差の比( $I_{Mi}$ )を図-11に示す。横軸を観測点数、縦軸を事前と事後の標準偏差の比としている。横軸が0のとき、つまり観測情報がない場合は、事前情報そのままになるので縦軸の値は1.0となる。どの未知パラメタも観測点数が増えるに従い、 $I_{Mi}$ は小さくなり、信頼性が向上する傾向が見られる。また、未知パラメタによっては同じ観測点数における配置パターンの優秀の順が異なる場合も見られる。次に、各ケースについて評価指数 $I_M, I_{R-A}, I_{R-B}$ を求め、図-12に示す。どの指標によっても2種類以上の測線を用いているパターン2や4の観測点配置の方が、1種類の測線を用いているパターン1や3よりも優秀と評価される。また、 $I_M$ と $I_{R-A}$ を比較するとほぼ同





図—11 各未知パラメタの推定信頼性の改善度



図—12 各観測点配置案の評価指数

様の結果となっており、各観測点配置の優劣の順番は変わらないことがわかる。一方、 $I_R-B$ は観測点数8個の時のパターン2bと3cのケースのように優劣の順番が逆になる場合も見られる。領域Aは広いため $I_R-A$ は各未知パラメタの信頼性を広く反映した評価となっているのに対して、領域Bは狭いため $I_R-B$ は特定のパラメタに重みを置いた評価指数となっている。したがって、 $I_R-A$ は $I_M$ とはほぼ同じような傾向が、 $I_R-B$ はやや異なる傾向が見られると考えられる。

ここで議論した観測点配置の評価手法に関連して、い

くつかの発展性が考えられる。例題では、単一のステップから成る問題について議論を行ったが、時間更新を行う場合も全く同様に議論することができる。また、本研究では $I_R$ として応力に注目して評価指数を設定したが、変位やひずみに注目する $I_R$ や、さらに発展させて、何らかの安定性基準に注目した評価指数、例えば想定したすべり面に沿って作用する力に注目した $I_R$ も考えられる。すべての目的に対して万能的な評価指数は存在せず、目的に合わせて評価指数を設定することが重要と考えている。横軸についても単純に観測点数とするのではなく、ボーリング長なども加味し概算の費用とすれば、図—12は費用と性能の関係を表すグラフとなり、より実用的な情報となる。また、いくつかの観測点配置の比較だけではなく、評価指数を目的関数とした観測点配置の最適化も考えられる<sup>17)</sup>。これらについては将来の課題としたい。

#### 4. ま と め

本研究では、時間更新を考慮した逆解析、および観測点配置の評価指数について論じた。その主な結果は次のようにまとめることができる。

- (1) ある施工あるいは観測ステップの逆解析によって求められた推定値とその共分散行列は、次のステップの事前事情として引き継ぐことにより、複数ステップの観測情報から総合的に未知パラメタの推定を行うことができる。こうした時間更新を考慮した逆解析の方法を示し、3つの条件

- 1) 未知量と観測量の関係が線形
- 2) ステップ間の観測量誤差が無相関
- 3) プロセスノイズが0

を満たしていれば、全ての観測量を同時に用いる逆解析と複数のステップから成る時間更新を考慮した逆解析が厳密に一致することを示した。

- (2) 時間更新におけるプロセスノイズの役割について論じ、プロセスノイズが新しいステップの情報に対する重みになっていることを示すとともに、その数値計算例も示した。
- (3) 未知量の事後の信頼性あるいは条件付き応答推定の信頼性は、共分散行列の形で定量的に評価することができる。事前と事後の共分散行列の対角成分の変化に着目した、信頼性の向上の程度を表す観測点配置の評価指数の提案を行い、その数値計算例を示した。

第1著者は理論展開と数値計算の一部を、第2著者は数値計算を担当し、第3著者は研究全般に渡る指導を行った。

#### 参考文献

- 1) 村上章, 長谷川高士: 構造工学・地盤工学における Kalman フィルタの適用, 農業土木学会論文集, 第158号, 1992.
- 2) 須藤敦史, 星谷勝: EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析, 土木学会論文集, No.446, pp.177-185, 1992.
- 3) 桜井春輔, 谷河正也: 岩盤の不連続面の影響を考慮した大規模地下空洞の変位計測結果の逆解析, 土木学会論文集, 第403号, pp.75-84, 1989.
- 4) 小嶋啓介, 足立紀尚, 荒井克彦: 地下水面下に掘削される土被りの浅い砂質地山トンネルのモデル実験と逆解析, 土木学会論文集, No.448, pp.91-99, 1992.
- 5) 吉田郁政, 黒瀬浩公, 福井史朗: 確率論に基づく逆解析手法の基礎研究, 土木学会論文集, 第483号, pp.61-68, 1994.
- 6) 吉田郁政, 豊田耕一, 星谷勝: 2次元FEMを用いた確率論に基づく逆解析の定式化とその解法, 土木学会論文集, 第507号/I-30, pp.129-136, 1995.
- 7) 吉田郁政: 講座 地盤工学における逆解析(14章 動的問題), 土と基礎, pp.45-50, 1996.6月号.
- 8) 中川徹, 小柳義男: 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1982.
- 9) 加藤寛一郎: 最適制御入門, 東京大学出版会, 1987.
- 10) 片山徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
- 11) 吉田郁政, 井出周治, 豊田耕一, 星谷勝: 確率論に基づく逆解析と順解析-条件付き確率有限要素法について-, 第3回構造物の安定性・信頼性に関する国内シンポジウム, pp.641-648, 1995.
- 12) 吉田郁政, 星谷勝: 既知条件の不確定性を考慮した逆解析, 土木学会論文集, 第501号, pp.213-216, 1994.
- 13) 門田俊一, 斉藤悦郎, 和久昭正, 後藤哲雄: 繰り返し拡張カルマンフィルタによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計算管理への適用, 土木学会論文集, 第406号, pp.107-116, 1989.
- 14) 村上章, 長谷川高士: Kalman フィルタ有限要素法による逆解析と観測点配置, 土木学会論文集, 第388号, 1987.
- 15) 清水則一, 桜井春輔: 地下空洞における変位計測の最適位置について, 第15回岩盤力学に関するシンポジウム, pp.175-179, 1983.
- 16) 芥川真一: Bayesの方法を用いた逆解析における計測パターンの優位性の数量的評価法, 第5回計算力学シンポジウム, pp.257-264, 1991.
- 17) 桜井春輔, 芥川真一, 山田美紀, 進士正人: 逆解析のための変位計測パターン選定に関する一考察, トンネル工学研究発表会論文・報告集, 第4巻, pp.341-346, 1994.

(1995.11.22 受付)

## BACK ANALYSIS WITH TIME UPDATE AND PERFORMANCE INDEX FOR SENSOR LOCATIONS

Ikumasa YOSHIDA, Kouichi TOYODA and Masaru HOSHIYA

The covariance matrix of unknown parameters has important roles to perform back analysis. In this study, we discuss two topics related to the covariance matrix. When we perform the back analysis with several construction or observation steps, the unknown parameters can be estimated totally from observation data of all steps if the result of back analysis of every step is succeeded to the next step as the prior information. The first topic is the methodology of the back analysis with time update. We discuss the effect of process noise, which is added to the covariance matrix in the update procedure. The second topics is the performance index for senser locations, based on the covariance matrix of unknown parameters or conditional responses. The usefulness of the index is demonstrated for a sensor locations of an embankment model.