

限界地震動指標を用いた損傷確率の効率的な算定方法

An efficient method for calculating fragility curve by using limit seismic intensity index

吉田郁政*, 鈴木修一**

Ikumasa YOSHIDA and Shuichi SUZUKI

*工博 東電設計(株) 地盤・構造部 (〒110-0015 東京都台東区東上野3丁目3番3号)

**東電設計(株) 地盤・構造部 (〒110-0015 東京都台東区東上野3丁目3番3号)

An efficient method for calculating seismic failure probability is studied and proposed. A fragility curve can be directly obtained by performing single Monte Carlo simulation (MCS) with respect to limit seismic intensity index, which is defined as the index that indicates minimum level of seismic motion which causes a failure event. Paying attention to the importance of tail part of a fragility curve, Latin Hypercube Importance Sampling method, a kind of MCS technique, is proposed, which is a combined method of Latin Hypercube sampling method and importance sampling method. The validity of the proposed method is demonstrated through the numerical examples.

Key Words: Monte Carlo simulation, seismic hazard curve, fragility curve, failure probability

キーワード: モンテカルロシミュレーション, 地震危険度曲線, 損傷度曲線, 損傷確率

1. はじめに

構造物の安全性照査, 評価において確率手法を用いた定量的安全性評価に対する必要性が認識されるようになってきた。構造設計の国際標準である ISO2394¹⁾ や欧州の設計標準である EuroCode²⁾ においても信頼性設計の考え方が取り込まれている。また, 原子力発電所のような重要構造物についても確率的安全性評価の必要性が議論されるようになってきた³⁾。

損傷確率の算定にはモンテカルロシミュレーション(以下, MCS と略記する)的なアプローチと限界状態関数を近似化した上で理論解を求める FOSM (first-order and second moment method) 的なアプローチがある⁴⁾。その他にも数値積分による方法もあるが, 限られた小規模な問題にしか適用することができない。MCS は計算時間がかかるという難点はあるものの, どんな問題にも適用することができ有用性は高い。特に最近の計算機能力の向上を考えると, MCS は様々な問題に対して現実的な選択肢となってきた。本論文では MCS に基づく損傷確率の算定方法について議論を行う。

供用期間中の地震時損傷確率を求める場合, 外力側の地震危険度曲線と耐力側の損傷度曲線に分離してそれぞれ求め, 最後に両者の数値積分によって算定することが一般的である。この方法は数値計算上の有利さもあり, 最も大きなばらつき要因である地震外力とそ

の他の要因を分離しているため, 損傷確率に対して感度の高い部分が損傷度曲線の極端な裾野部分とはならない。そのため比較的少ないサンプル数の MCS で求めた損傷度曲線でも精度の高い損傷確率を算定することができる。つまり, ばらつきが大きい要因については数値積分を, その他の要因については MCS を用いて損傷確率を算定すると解釈することができる。

本論文では限界地震動指標の考え方を導入し, MCS による効率的な損傷度曲線及び損傷確率の計算法の提案を行う。また, MCS 手法としてラテン方格法と重要度サンプリングの考え方をあわせたラテン方格重要度サンプリング法の提案を行う。橋脚の保有耐震性能評価を例題として提案手法の数値計算例を示し, その有効性について議論する。

2. 限界地震動指標による損傷度曲線の算定

損傷度曲線を算定する場合, 多くの地震動レベルに対して信頼性解析を実施して条件付き損傷確率を求める方法が一般的である。信頼性解析手法として MCS を用いた場合の損傷度曲線算定の概念を図-1に示す。本論文ではこの方法を従来法と呼ぶことにする。図では3つの地震動レベルに対する MCS が示されているが, 実際にはもっと多くのレベルに対して実施することが好ましく, 従来法では MCS を多数繰り返す必要があり, 多くの計算時間を要する。これに対して, 限

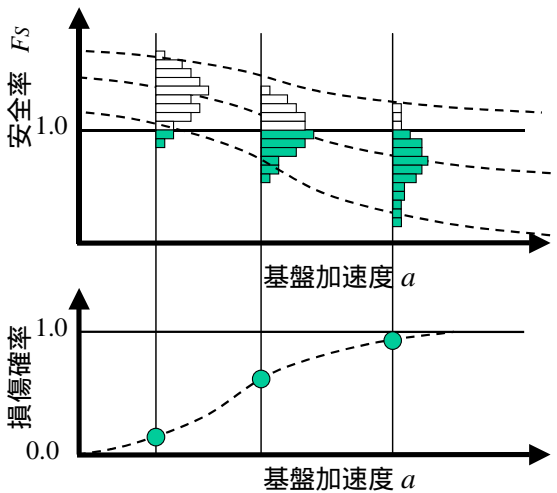
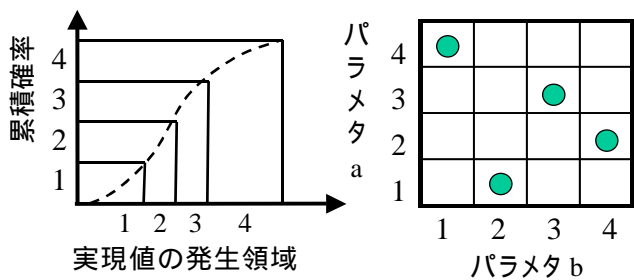


図 - 1 従来法による損傷度曲線の算定



(1) 1次元の発生領域 (2) 2次元の発生領域
図 - 3 ラテン方格法 (LHS) による乱数の発生

界地震動指標の考え方を導入し、直接的に損傷度曲線を求める方法を考える。限界地震動指標は限界状態を損なう最小の地震動に関する指標と定義する。地震動指標としては最大加速度や最大速度、スペクトル強度などが考えられる。図 - 2 は最大加速度を地震動指標とした場合の限界地震動指標を用いた損傷度曲線算定の概念を示している。入力最大加速度に応じた安全率を多数算定し(図中では一本の波線)、安全率が1.0となる最大加速度を限界加速度として算定する。安全率が不連続になり1.0となる最大加速度が求まらない場合には、1.0以下となる最小の加速度とする。MCSにより限界加速度のばらつきを算定し、その累積関数を求めると損傷度曲線を得ることができる。

従来法と提案法はアプローチが異なるだけで、それぞれ厳密な方法である。従って、効率の良い方を選べばよいことになる。従来法は多くの外力レベルごとに信頼性解析を行う必要があるのに対して、提案方法は一回の信頼性解析ですむものの、限界地震動指標一回当たりの算定に多くの計算労力を要する。しかし、バイナリサーチなどの方法を用いることにより数回から十回程度の繰り返し回数で十分な精度の限界地震動指標を算定でき、従来法に比べて十分な優位性がある。例えば、1000galの範囲を10回のバイナリサーチで探索することにより誤差を $1000/2^{10}$ 、すなわち1gal以下に押さえることができる。さらに、対象とする問

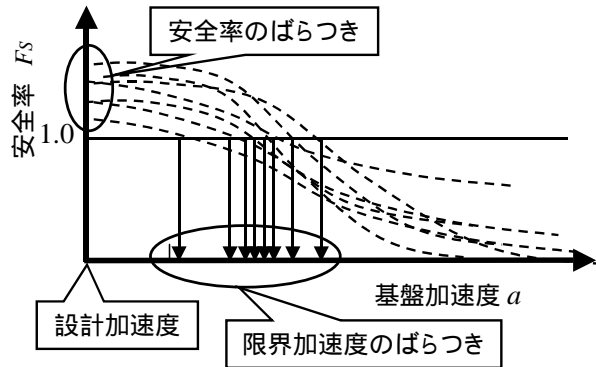


図 - 2 提案法による損傷度曲線の算定

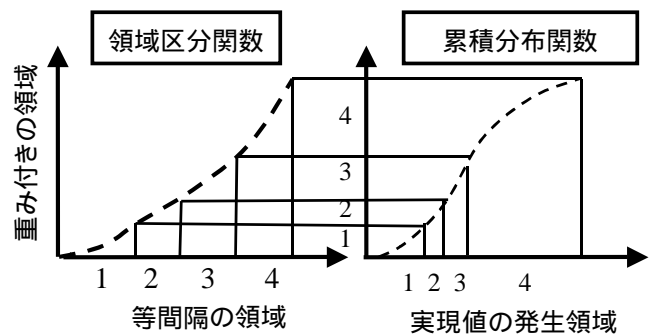


図 - 4 ラテン方格重要度サンプリング(LHIS)

題の特性を活かした効率的な方法がある場合には限界地震動指標を用いる方法はさらに有利となる。例題として後述する橋脚の問題では地震時保有水平耐力法を用いていることから直接限界地震動指標が求められるため提案法は非常に効率的に機能する。

3. LHS と重要度サンプリングを用いた MCS

比較的少ないサンプル数で精度のよい結果が得られる方法としてラテン方格法⁵⁾(Latin Hypercube sampling, 以下LHSと略記する)が知られている。この方法は層別サンプリングと crude sampling(通常のランダムなサンプリング)の中間的な方法である。

層別サンプリングでは同じ確率をもつ n 個の領域に分割し、それぞれ一個ずつサンプルを抽出する。図 - 3(1)のイラストでは一次元の領域を同じ確率を有するように4分割した例を示している。縦軸の累積確率を0.25ずつ4分割すると、横軸に示すように長さの異なる4つの領域に分割される。 n 次元の問題を各次元について m 分割すると層別サンプリングでは領域が m^n 個となり、次数が大きくなると領域数が膨大になる。LHSでは各次元ごとに m 分割して発生させた実現値をランダムに並び替えて組み合わせ、 m 個の実現値のセットを作成する。図 - 3(2)の例では4分割した2次元問題のイラストを示している。この例では(a4, b1),

(a1, b2), (a3, b3), (a2, b4) の4つの領域から実現値がサンプルされる。

真の密度関数とは異なる確率密度関数をサンプリングの際に用いる重要度サンプリングの考え方⁶⁾がある。後述するように損傷確率の算定において損傷度曲線の裾野部分の情報が重要であるため、そうした実現値が多数得られるようなサンプリング関数が好ましい。構造物や地盤の損傷を議論する場合、材料の強度特性は小さい方が損傷に至る実現値を多数発生させることは明白である。そこで、サンプル発生領域を同じ確率を有する領域に分割するのではなく、図-4に示すように小さい領域に偏らせて分割することとした。分割の方法は任意でよいが、以下の例題ではべき関数 $y=x^{cw}$ を領域区分のための関数として用いた。係数 cw を 0.0 とすると等間隔、大きくすると値の小さな領域に多数のサンプルが発生される。重みはその微分値 $cw \times x^{cw-1}$ で与えられる。本論文ではこのラテン方格法と重要度サンプリングをあわせた手法を LHIS (Latin Hypercube Importance Sampling) と呼ぶことにする。

4. MCS と損傷度曲線, 地震危険度曲線

損傷度曲線 $F_R(z)$ はある地震動レベル z よりも小さな地震動で損傷する確率を表しており、その一階微分は限界地震動指標の確率密度関数に相当する。限界地震動指標を R , ある期間に発生する最大地震作用の大きさを S で表し、両者は互いに独立で同時密度分布が $f_S(s)f_R(r)$ で表されるとすると、損傷確率は $P_f = P(R < S)$ は損傷度曲線 $F_R(z)$ を用いて次式で求めることができる。

$$P_f = \int_0^\infty \int_0^s f_S(s) f_R(r) dr ds$$

$$= \int_0^\infty f_S(s) F_R(s) ds \quad (1)$$

積分の順番を逆にすると

$$P_f = \int_0^\infty \int_r^\infty f_S(s) f_R(r) ds dr$$

$$= \int_0^\infty (1 - F_S(r)) f_R(r) dr \quad (2)$$

となり、地震危険度曲線 $1 - F_S(z)$ と限界地震動指標の密度関数 $f_R(z)$ を用いて損傷確率が算定される。

MCS によって密度関数 $f_R(z)$ に従う限界地震動指標のサンプル z_i を n 個発生させると、式(2)から明らかなように損傷確率 p_f は次式で算定される。

$$p_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - F_S(z_i)) \quad (3)$$

さらに、重要度サンプリングによって発生させる場合には真の密度関数 $f_R(z)$ とサンプリング密度関数 $g(z)$ を用いて次式で算定することができる。

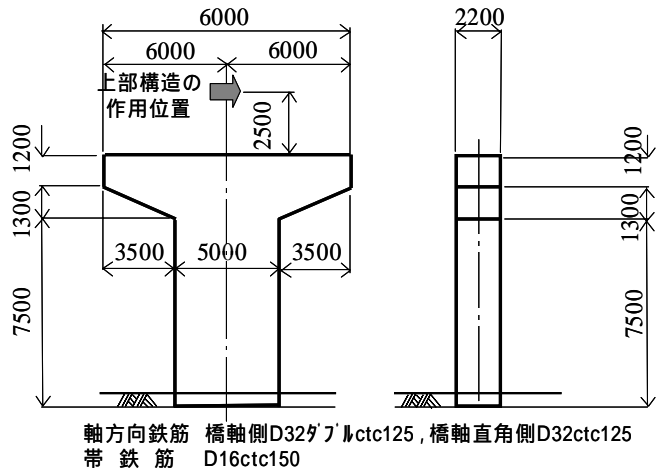


図-5 例題とした橋脚の概要

$$P_f = \int_0^\infty \int_r^\infty f_S(s) f_R(r) ds dr$$

$$= \int_0^\infty \int_r^\infty f_S(s) \frac{f_R(r)}{g(r)} g(r) ds dr \quad (4)$$

$$= \int_0^\infty (1 - F_S(r)) \frac{f_R(r)}{g(r)} g(r) dr$$

従って、サンプリング密度関数 $g(z)$ を用いた実現値 z_i から以下の式で損傷確率が求められる。

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - F_S(z_i)) \frac{f_R(z_i)}{g(z_i)} \quad (5)$$

5. 数値計算例

5.1 例題としたモデルと検討ケース

鉄筋コンクリート製橋脚を例題として検討を行った。図-5に示すように橋脚の形状は、高さが10.0m、厚さ2.2mで、幅は一般部5.0m、張出部12.0mである。また橋脚には上部構造部分の重量として6200kNが作用している。

橋脚の限界状態としては、降伏耐力、せん断耐力及び変形性能が考えられるが、ここでは一例として変形性能に注目して損傷度曲線の算定を行った。照査方法は道路橋示方書の地震時保有水平耐力法の考え方⁷⁾に準拠した。限界加速度の算定フローを図-6に示す。基本的には通常地震時保有水平耐力設計法の逆の手順で算定した。まず、二次元非線形フレーム解析を用いてプッシュオーバー解析を行い、作用荷重と橋脚の水平変位の関係を算定する。エネルギー一定則の考え方と許容塑性率を用いて、荷重-変位関係より橋脚に損傷が生じる最小の水平荷重を算定する。最後に、水平荷重及び橋脚の固有周期、重量により等価水平震度を求め、それを加速度に置換えて限界加速度を算定した。地震時保有水平耐力の考え方は限界加速度の算定に適しており、繰り返し計算を必要とせずに直接算定

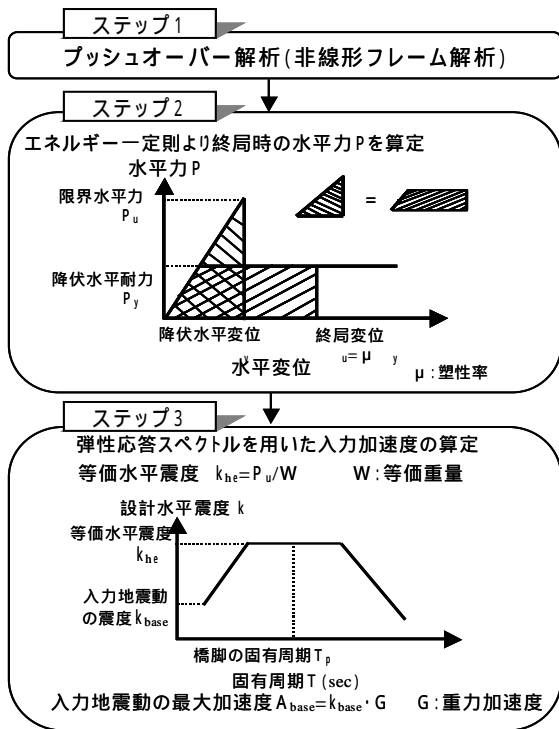


図 - 6 限界加速度算定フロー

することができ効率的である。

変形性能に対するばらつき要因としてコンクリート、鉄筋の材料特性と限界状態照査式を考えた。これらのばらつき要因の統計的特性を表 - 1 にまとめて示す。

MCS は、通常のランダムなサンプリングを行う方法 (crude と記す)、LHS (ラテン方格法)、LHIS (ラテン方格 + 重要度) の 3 種類の方法によって計算を行った。試行回数は 30 回とし、それぞれの手法について同じ条件で乱数の種を変えて 30 回 MCS (サンプルサイズ 30 × 30 回) を実施した。

5.2 損傷度曲線及び損傷確率の比較

ランダムサンプリング (crude) による MCS を実施した結果について図 - 7 に示す。(1)と(2)は MCS から直接得られた累積分布関数、すなわち損傷度曲線を示している。 n 個の限界加速度を小さい方から並べ、そのうち m 番目の値の累積確率を $m/(n+1)$ としてプロットしている⁸⁾。(1)は一般軸で、(2)は対数軸で示した。(3)は MCS の結果から得られた実現値の密度関数を示している。MCS の結果の実現値を z_i として、まず密度関数を、

$$f_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\tau - z_i) \quad (6)$$

とおく。ここで、 δ はディラックのデルタ関数である。これに対して Parzen ウィンドウ⁹⁾処理を行って図化の

表 - 1 不確定要因の統計量

不確定要因		平均値 μ	標準偏差	変動係数	
構造物の材料特性	コンクリート	圧縮強度 (N/mm ²)	31.0	1.2	0.04
	呼び強度 24.0(N/mm ²)	引張強度 (N/mm ²)	$f_t=0.23f_c^{2/3}$	0.093 μ	0.093
		弾性係数 (kN/mm ²)	$E_c=8.39f_c^{1/3}$	0.12 μ	0.12
鉄筋 SD295	降伏強度 設計300(N/mm ²)	370.0	18.5	0.05	
	弾性係数 設計210(kN/mm ²)	195.0	2.0	0.01	
耐力算定式(靱性率評価式)		1.0 × 計算値	0.51 μ	0.51	

ための密度分布を求めた。

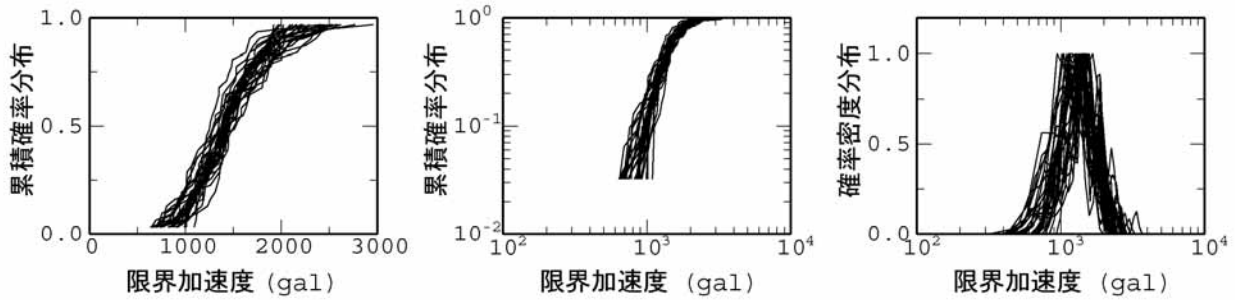
同様の形式で LHS によって求めた損傷度曲線を図 - 8 に示す。全体的に LHS の方がばらつきが小さくなっており、効率的なサンプリングができていことがわかる。

LHIS の結果については重みを考慮し、以下の式によって損傷度曲線を求めた。

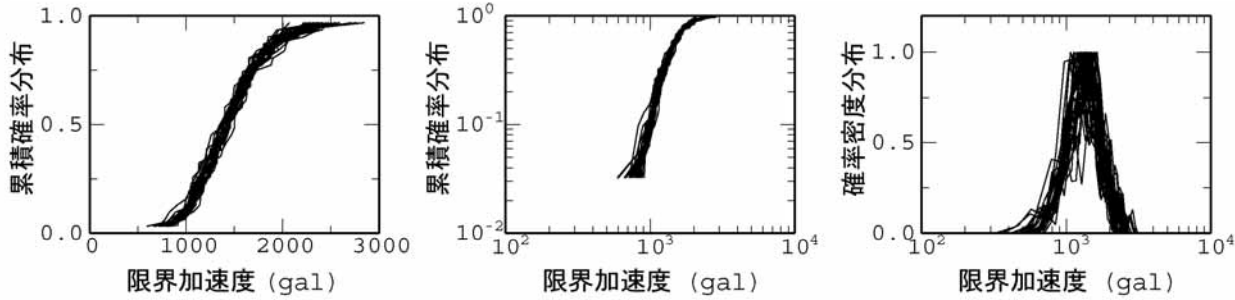
$$F_R(z_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^m \frac{f_R(z_i)}{g(z_i)} \quad (7)$$

なお、実現値 z_i は小さい順に並べられている。図 - 9 に求められた損傷度曲線を示す。特徴としては左下の裾野部分が小さい範囲まで求められていること、全体的にはばらつきが大きい裾野部分のばらつきは小さいことが挙げられる。図の(3)ではサンプル値そのものの密度関数を表すため、重みは考慮せずに式(6)をそのまま用いている。サンプル値は比較的限界加速度が小さい領域に発生していることがわかる。そのため、限界加速度が小さい領域まで損傷度曲線が求まっているものの、大きい領域では極端にばらつきが大きくなっている。

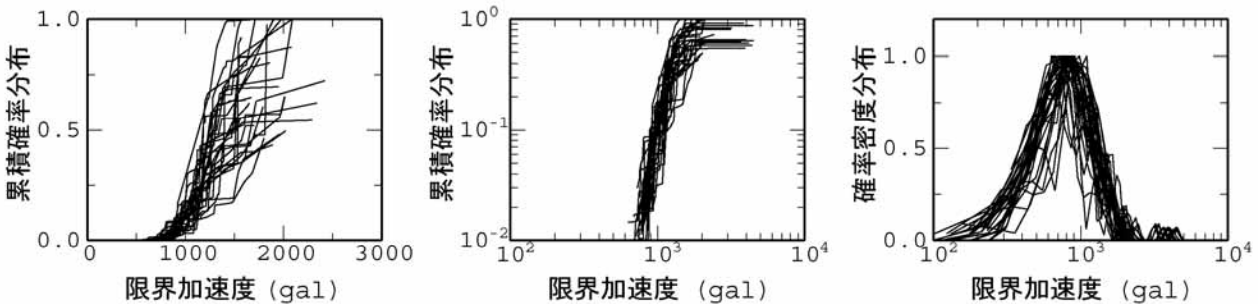
次に損傷確率の算定を行った。地震危険度曲線としては A, B, C, D の 4 地点の曲線を用いる。これらを図 - 10 に示す。大きい順に A, B, C, D となっている。それぞれの地震危険度曲線に対して 30 個の損傷度曲線を用いて 30 の損傷確率を算定した。損傷確率に関する平均は、3 つ方法 crude, LHS, LHIS で大きな差はなかったが、そのばらつきについては図 - 11 に示すように傾向的な差が現れた。crude や LHS では地震危険度の大きさに依存して変動係数が変化しており地震危険度が小さな地点 D では変動係数が大きくなっている。一方、LHIS ではあまり大きく依存せずに比較的一定の変動係数になっている。LHS と LHIS を比較すると地震危険度が大きい場合には LHS が、小さい場合には LHIS が変動係数が小さく有利になっている。A 地点のように地震危険度が大きい場合には損傷度曲線の裾野部分だけでなく、中央値付近も損傷確率に寄与するようになるため、限界加速度が大きい場所のばら



(1)一般軸における損傷度曲線 (2)対数軸における損傷度曲線 (3)サンプルの密度関数
 図 - 7 crude による損傷度曲線とサンプルの発生密度関数



(1)一般軸における損傷度曲線 (2)対数軸における損傷度曲線 (3)サンプルの密度関数
 図 - 8 LHS による損傷度曲線とサンプルの発生密度関数



(1)一般軸における損傷度曲線 (2)対数軸における損傷度曲線 (3)サンプルの密度関数
 図 - 9 LHIS による損傷度曲線とサンプルの発生密度関数

つきが大きい LHIS による損傷度曲線では損傷確率のばらつきも大きくなっていると考えられる。一方、D 地点ではほとんど損傷度曲線の裾野部分で損傷確率が決まっているため、裾野部分に多くの情報をもつ LHIS が有利になっている。

5.3 対数正規分布による損傷度曲線の近似

損傷度曲線は対数正規分布などによって関数化して整理される場合が多い。単純に平均、分散を算定して関数化すると算定される損傷確率が式(3)や(5)による値と大きく異なる場合がある。そこで、対数正規分布に従う場合、標準正規確率変数 i と $\log(z_i)$ が直線になることに注目して、重み付き最小二乗法によって対数正規近似を行う方法を考えた。損傷確率に対する各サンプル値 z_i の寄与度は式(3)では $1-F_S(z_i)$ 、式(5)では

$(1-F_S(z_i))f_R(z_i)/g(z_i)$ であることに注目し、これらを重みとした 図 - 12 に MCS から直接求めた損傷度曲線、重み付き最小二乗によって対数正規近似した曲線を示す。重みとなる地震危険度曲線は地点 A と D を用いた。A の場合は比較的限界加速度が大きい領域まで近似が行われているが、D の場合は裾野部分を正確に近似している。単純に平均、分散から対数正規近似を行うと損傷確率に対して感度の低い限界加速度の大きな領域までまったく同じように扱うことになるため、重要な裾野部分の一致度が悪くなり損傷確率の算定精度が悪くなる。MCS(LHS)から直接求めた損傷確率と重み付き最小二乗法で近似した対数正規分布による損傷確率の比較を図 - 13 に示す。地震危険度曲線 A, B, C, D について 30 ケース分、計 120 ケースの結果が示されている。損傷確率が小さい場合には対数正規分布を用いる方が大きくなるが、損傷確率が大きくなるにつ

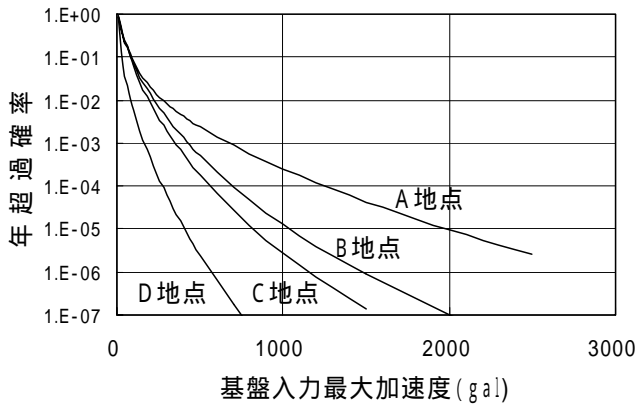


図 - 10 4地点の地震危険度曲線

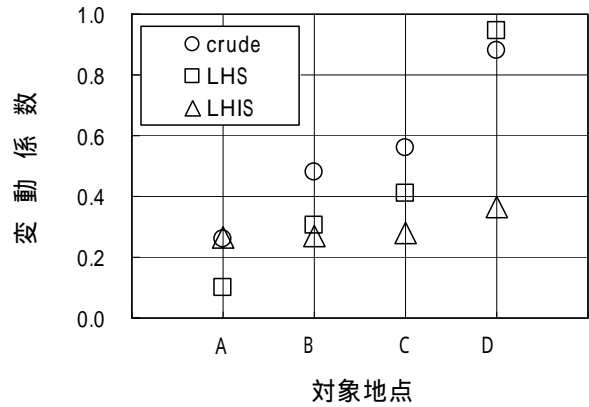


図 - 11 損傷確率のばらつきの比較

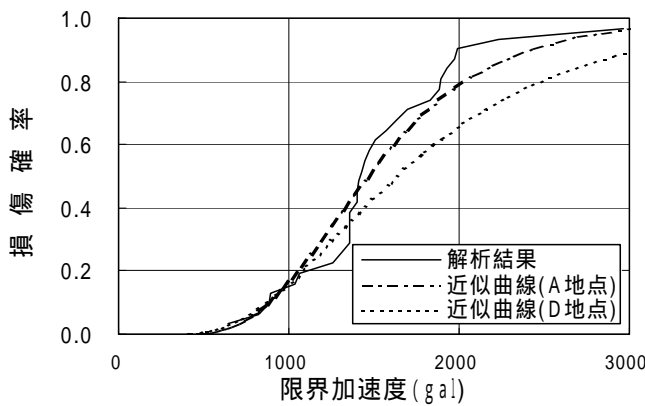


図 - 12 MCS から直接求めた損傷度曲線と対数近似した損傷度曲線

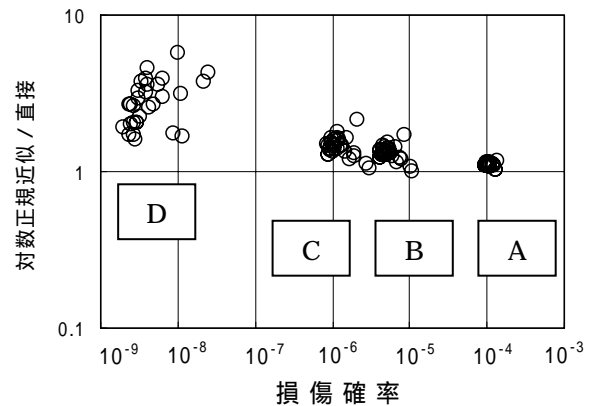


図 - 13 MCS から直接求めた損傷確率と対数近似して算定した損傷確率

れて、その差は小さくなっている。

6. おわりに

本論文では損傷確率算定の効率性に注目した、損傷度曲線の算定方法について検討を行った。主な結論として以下の点が上げられる。

- (1) 限界地震動指標の考え方を導入し、MCS 結果から直接的に損傷度曲線や損傷確率を算定する方法について提案を行った。
- (2) 損傷確率算定において損傷度曲線の裾野部分が重要となるため、ラテン方格法(LHS)と重要度サンプリング法をあわせた方法 LHIS を提案し、数値計算例から損傷確率が小さい場合に有効であることを示した。

提案手法(LHIS)に関する課題としては、大きい限界加速度に対するばらつき低減のための工夫、領域区分の係数の適切な与え方、などが挙げられる。今後は本手法を斜面の安定問題や護岸の安定問題などに適用していく予定である。

参考文献

- 1) 国際標準化機構 (ISO) : ISO2394, General principles on reliability for structures

- 2) CEN: Eurocode 1, Basis of design and actions on structure.
- 3) 原子力安全委員会ホームページ (原子力安全基準専門部会耐震指針検討分科会), http://nsc.jst.go.jp/senmon/shidai/senkaisi_kensaku_f.htm
- 4) 星谷勝, 石井清, 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986
- 5) Schueller, G.I., Bucher, C., Bourgund, U., Ouypornprasert, W., On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probabilities, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.4, No.1, pp 10 - 18, 1989.
- 6) 伏見正則, 確率的方法とシミュレーション, 岩波講座応用数学, 1994
- 7) 日本道路協会, 道路橋示方書・同解説, (1996)
- 8) Ang, A. H-S., Tang, W. H., (訳: 伊藤学, 亀田弘行), 土木・建築のための確率・統計の基礎, 丸善 (株), p.260, 1977
- 9) 大崎順彦, 新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994

(2002年9月13日 受付)