

MCMCを用いた損傷確率の効率的算定法

吉田郁政¹・佐藤忠信²

¹正会員 工博 武蔵工業大学 工学部 教授（〒110-0015 東京都世田谷区玉堤 1-28-1）
（投稿時：東電設計株式会社 地盤・構造部）

E-mail:iyoshida@sc.musashi-tech.ac.jp

²正会員 工博 早稲田大学 理工学術院 客員教授（〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1）
（投稿時：京都大学防災研究所）

リスク、ライフサイクルコスト、確率論的安全性評価の重要性が認識されるようになり、損傷確率の効率的算定法の必要性が高まっている。本研究では損傷に対して影響の大きい部分空間を適応的に絞り込み、そのマルコフチェーンモンテカルロ法(以下、MCMCと記す)を用いてサンプルを発生させて効率的に損傷確率を算定する方法について検討を行った。提案方法では一様分布の解空間に対してMCMCによるサンプルを発生させた後、対数正規分布など所定の確率分布に変換を行うことでアルゴリズムの簡略化と効率化を図った。簡単な限界状態関数を用いて提案方法の解説、有効性の確認を行った後、限界指標を用いた損傷度曲線算定法に提案手法を取りこみ、橋脚及び斜面の地震時安全性に関する損傷度曲線の試算を行った。

Key Words : Markov chain Monte Carlo, failure probability, PSA, subset, fragility curve

1. はじめに

限られた予算内で合理的な設計，維持管理を行う必要性や説明責任の観点からライフサイクルコスト（以下LCCと記す）評価に対する必要性が高まっている。LCCに地震などによる損傷のリスクを取りこむためには限界状態を損なう確率の算定が重要な課題となる。また，原子力発電所のような重要構造物に対しては確率論的安全性評価PSAの重要性が認識されるようになり，その評価技術が検討されている。さらに，ISO2394¹⁾やユーロコード²⁾でも安全性の確率論的定量化の必要性は述べられており，各種構造物に対して適用できる効率的な損傷確率評価技術の開発は重要なテーマとなってきた。

損傷確率の算定方法として，解析的な方法や数値積分も限られた状況では有効であるが，一般にはその適用は困難である。AFOSM³⁾のような近似解法も知られているが，限界状態関数の非線形性が強い場合や非ガウス分布の場合には精度や安定性に関してやや問題がある。モンテカルロシミュレーション（以下，MCSと記す）は一般性があるものの，計算時間がかかるという難点があった。しかし，近年の飛躍的な計算機能力の向上，アルゴリズムの改良により，現実的な手段としてMCSが用いられる場面が増えてきた。MCSの効率化のための方法としては，

層別サンプリング^{4), 5)}，負相関の方法^{4), 5)}，ラテン方格法^{6), 7)}などが知られている。これらはサンプルの偏りを減らすことによる改良法であり，低損傷確率の算定という意味では直接的には効果が少ない。

低損傷確率を算定する方法としては加重サンプリング^{4), 5)}の考え方が有名であるが，サンプリングのための密度関数の選び方に解の精度が依存するという問題がある。著者の一人は限界状態関数から感度の高い確率変数について分離し，限界指標の考え方をういて効率的に損傷確率を算定する方法について検討を行ってきた。これまでに橋脚の耐震性評価⁸⁾，斜面の地震時安定性評価^{9), 10)}，防波護岸の耐波性能評価¹¹⁾，埋設構造物の常時・地震時の終局限界状態評価^{12), 13)}に適用し，その有効性を示した。

しかし，各変数の感度が不明な問題や感度が高い変数が複数あり特定の変数だけを分離するだけでは不十分な問題もある。感度解析を自動的に行い，効率的に損傷確率を算定するMCS手法としてsubset法が提案されている¹⁴⁾。

そこで，本研究では，限界地震指標を用いる損傷度解析の方法にsubset法を導入し，より効率的に損傷度曲線の裾野部分を計算できるように検討を行った。また，subset法では損傷に対して危険な部分空間を自動的に絞り込み，その空間内へマルコフチェーンモンテカルロシミュレーション¹⁵⁾（Markov

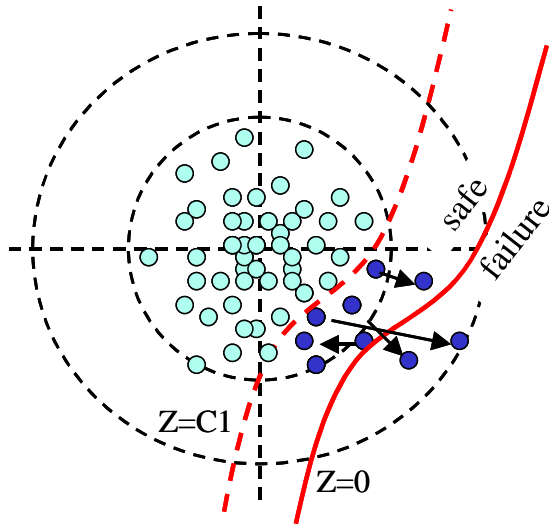


図-1 subset法の考え方

$Z < C_1$ となる部分空間(subset)を定め、MCMCを用いてサンプルを発生させる

chain Monte Carlo, 以下, MCMCと記す)を用いてサンプルを発生させるため, MCMCの効率が重要となる. そこで, MCMCの効率に対して重要なサンプラー(解候補を発生させる方法)についても工夫を行う. 簡単な限界状態関数を用いて有効性を確認した後, 筆者らがこれまでに開発してきた限界指標を用いたMCS手法にMCMC, subset法の考え方を取りこみ, 橋脚及び斜面の地震時安全性に関する損傷度曲線の試算を行う.

2. 低損傷確率の効率的算定方法

(1) subset法による損傷確率の算定法

不確定変数の空間内の損傷領域を F とし, 損傷確率を $P(F)$ と表わす. ここで, 全体集合を F_0 , その部分集合を F_i と表わし, $F_m = F$ とする.

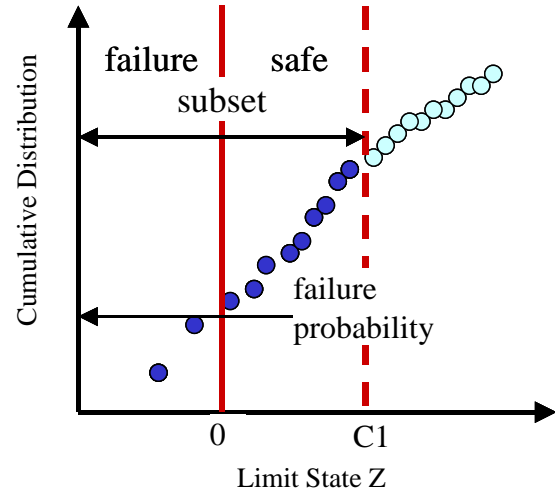
$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F \quad (1)$$

損傷確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定することができる.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_m) \\ &= P(F_m | F_{m-1})P(F_{m-1} | F_{m-2}) \dots P(F_1 | F_0) \end{aligned} \quad (2)$$

例えば, 算定したい損傷確率を 10^{-4} とすると, $P(F_i | F_{i-1})$ が 10^{-1} 程度になる3個の部分空間, F_1, F_2, F_3 を設定することにより, 式(2)を用いて損傷確率を算定することができる. モンテカルロ手法を用いることを想定すると 10^{-4} レベルの確率計算を1回行うよりも 10^{-1} レベルの計算を4回行う方がはるかに計算労力は少なくて済むというのがsubset法¹⁴⁾のアイデアである.

限界状態関数 $z=f(x)$, 不確定変数ベクトル x の確率



密度分布 $p(x)$ が与えられるとし, 損傷状態を $z < 0$ と定義して, 損傷確率 $P(z < 0)$ を算定する問題を考える. 図-1にsubset法を用いた損傷確率算定の概念を示す. まず, 1回目は通常MCSと同様にサンプルを発生させ, その限界状態関数の値を算定する. 限界状態を損なうサンプルが発生している場合にはその比率が損傷確率となるが, 低損傷確率の問題ではサンプル数が十分に大きくないと損傷にいたるサンプルが発生しない. そこで, subset法では1回目のMCS結果に基づき $Z < C_1$ となる部分空間(損傷空間よりも広い部分空間, $C_1 > 0$)を定め, MCMCを用いてその部分空間内にサンプルを発生させる. これを繰り返し部分空間を徐々に小さくすることで損傷確率を算定する.

計算手順をまとめて以下に示す.

- 1-1 確率変数の密度関数 $p(x)$ に従って n_i 個のサンプルを発生させ, それぞれ限界状態関数を算定する. 部分空間のカウンター $i = 0$ とする.
- 1-2 限界状態関数値を小さい順にならべ z_1, z_2, z_3, \dots とする. $P(F_{i+1} | F_i) = n_s / n_i$ となる部分空間 F_{i+1} を次式で定義する.

$$F_{i+1} = \{x | z(x) < C_{i+1}\}, \quad C_{i+1} = \frac{z_{n_s} + z_{n_{s+1}}}{2} \quad (3)$$

- 1-3 MCMCによって, 部分空間 F_{i+1} 内に n_i 個のサンプルを発生させる.
- 1-4 損傷が生じる, すなわち $z < 0$ となるサンプル個数 n_f が十分な場合($n_f > n_s$)には終了. そうでない場合には $i = i + 1$ としてステップ2へ.

以上の手順により, i 番目の部分集合内に損傷にいたる n_f 個のサンプルが得られた場合には次式によって損傷確率を算定することができる.

$$P(z < 0) = \left(\frac{n_s}{n_t} \right)^i \frac{n_f}{n_t} \quad (4)$$

n_s は部分空間の大きさを決めるパラメタであり、後述の例題では n_t を100、 n_s は10とした。この場合、 $P(F_i|F_{i-1})=0.1$ となるように部分空間を絞り込んでいくことになる。 n_t は要求される精度に応じて決めればよく、ここでは一例として100とした。部分空間の絞り込みの大きさは効率に関わる。既往の研究の推奨値¹⁴⁾に従って0.1とした。

(2) MCMCによるサンプルの発生方法

上記のステップ1-3で必要となるMCMCの概要について述べる。MCMCにより任意の目標分布(target distribution) (x) に従うサンプルを発生させることができる。その手順を以下に示す¹⁵⁾。

2-1 初期値 x_0 を任意に定める。カウンターを $k=0$ とおく。

2-2 適当に定めた確率密度分布 $q(x'|x_k)$ に従い、 x_{k+1} の候補 x' を発生させる。

2-3 式(5)に示す採択率 (x_k, x') を算定し、確率で $x_{k+1}=x'$ 、確率 $1 - \alpha$ で $x_{k+1}=x_k$ とする。

2-4 $k=k+1$ として、ステップ2へ戻る。

以上の手順を所定のサンプル数になるまで繰り返す。 $q(x'|x_k)$ は x_{k+1} の候補 x' を発生させるための適当な確率密度関数であり任意の関数でよいが、選び方によって計算効率が左右される。 $q(x'|x_k)$ をproposal distribution、解候補を発生させる方法をサンプラーと呼ぶ。また、採択率 α は次のように定義される。

$$\alpha(x_k, x') = \min\{1, b(x_k, x')\} \quad (5)$$

ここで、

$$b(x_k, x') = \frac{\pi(x')q(x_k|x')}{\pi(x_k)q(x'|x_k)} \quad (6)$$

である。

上記の計算手順によって任意の目標分布 (x) に従うサンプルを発生させることができる。この簡単な証明¹⁵⁾を付録に示した。

(3) MCMCを用いた損傷確率算定法

部分空間におけるサンプル発生(ステップ1-3)を上記MCMCを用いて行う方法について示す。部分空間 F_i における条件付確率密度関数 $pdf(x|F_i)$ は以下の式で表わすことができる。

$$pdf(x|F_i) = \frac{pdf(x)I_{F_i}(x)}{P(F_i)} \quad (7)$$

ここで、 $I_{F_i}(x)$ は x が部分空間 F_i の内にある場合($z < C_i$)には1、外にある場合($z \geq C_i$)には0となる関数である。

式(7)に従うサンプルの発生を一樣分布に基づくMCMCを用いて行う。MCMCの定式化上は、確率変数を一樣分布に従う変数 u とするが、対数正規分布等、任意の分布に従う変数 x はその累積分布関数 $\Phi(x)$ を用いて一樣分布 u から次式で変換できるため実用上問題はない。

$$x = \Phi^{-1}(u) \quad (8)$$

後述の例題においても不確定変数は対数正規分布や正規分布に従うと仮定している。

定義域を0から1の間とする一樣分布の確率密度関数 $I_{(0,1)}(u)$ を用いて式(7)を書き直すと次式が得られる。

$$pdf(u|F_i) = \frac{pdf(u)I_{F_i}(u)}{P(F_i)} = \frac{I_{(0,1)}(u)I_{F_i}(u)}{P(F_i)} \quad (9)$$

本研究ではproposal distributionも u_k を中心とした一樣分布を用いる。

$$q(u'|u_k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2a} \right)^n; & |u_k - u'|_{\infty} < a \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 n は変数ベクトル u の次元、 $|\cdot|$ は最大値ノルム、 a は(0,1)の任意の実数である。以上の条件のもと採択率は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \alpha(u_k, u') &= \min \left\{ 1, \frac{\pi(u')q(u_k|u')}{\pi(u_k)q(u'|u_k)} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{P(F_i)I_{(0,1)}(u')I_{F_i}(u')(2a)^n}{P(F_i)I_{(0,1)}(u_k)I_{F_i}(u_k)(2a)^n} \right\} \\ &= \min \{ 1, I_{(0,1)}(u')I_{F_i}(u') \} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)よりわかるように、一樣分布によって作成された解候補 u' が(0,1)の範囲にあり、所定の部分空間 F_i 内に収まっていれば必ず(確率1で)採択、そうでなければ非採択となる。

多次元の問題に対しては一度に全ての変数を同時に更新させ、その判定を行うと採択率が低くなり効率が悪くなる。single-component Metropolis-Hastingsと呼ばれるアルゴリズム¹⁵⁾では各変数について単独に更新させるサンプラーを用意して効率を向上させる工夫を行っている。本研究では解領域を判定する $I_{(0,1)}(u)$ についてのみ変数ごとに更新、判定を行い、計算時間のかかる部分空間の判定 $I_{F_i}(u)$ については全ての変数についてまとめて判定することで効率化を図る。こうした工夫については3.(3)で改めて述べる。

3. 単純な限界状態関数による有効性の確認

(1) 例題とする限界状態関数

次に示す2種類の単純な限界状態関数を用いて提案手法の有効性の検討を行う。

$$z = x_2 - x_1 \quad (12)$$

$$z = x_2 - (x_1 - 6)^2 + 7 \quad (13)$$

2つの変数 x_1, x_2 がそれぞれ $N(5, 0.5), N(9, 0.5)$ に従う独立な確率変数とする。ここで $N(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布を意味する。式(12)では正規分布に従う変数の和や差はやはり正規分布となるので、 z は $N(4,1)$ に従う確率分布となる。損傷状態を $z < 0$ と定義すると損傷確率 $P(z < 0)$ は簡単に求められ、 3.17×10^{-5} となる。一方、式(13)のように非線形の場合は z が正規分布とはならない。そこで損傷確率 $P(z < 0)$ を数値積分より求めたところ、 7.33×10^{-5} が得られた。

(2) 部分空間における不確定変数、限界状態関数

上記の問題について2章で述べたMCMC, subset法の考え方をを用いて損傷確率の算定を行った。まず、危険な部分空間へと絞り込んで行ったときの不確定変数や限界状態関数値の様子について示す。最初に、式(12)の線形限界状態関数について述べる。全空間についてラテン方格法^{6), 7)}を用いて発生させたサンプル100個を図-2(1)に示す。図中には限界状態関数も示してある。損傷確率が小さいのでサンプル数100個では損傷領域に達しているサンプルは一つもない。このうち限界状態関数値 z が小さい方から10個(2. (1)パラメタ n_s)を選び式(3)により部分空間 F_1 を定義する。この10個それぞれについてMCMCにより10個ずつサンプルを発生させ、計100個のサンプルを発生させる。発生させたサンプルを図-2(2)に示す。以下、損傷に至るサンプルが十分発生するまで同様の手順を繰り返す。部分空間 F_2, F_3, F_4, F_5 についても図-2に示した。発生させたサンプルが徐々に限界状態に近づいていく様子が見られる。

式(13)の非線形の限界状態関数についても同様の計算を行った。解空間が絞り込まれていく様子を図-3に示す。線形の場合と全体的傾向は同様であるが、限界状態関数が確率密度関数の等高線と逆の方向に湾曲しているため、サンプルがより狭い領域に集中している。

次にこれらのサンプルをもとに累積分布を求める。通常のMCSであれば n 個の限界状態関数値を小さい方から並べ、そのうち m 番目の値の累積確率を

$m/(n+1)$ とすることで求めることができる¹⁶⁾。最初の全空間については同様にして求め、部分空間 F_i については同様にして求めた累積分布に $(n_s/n_i)^i$ を乗じることで全体の分布を示すことができる。こうして求めた累積分布を数値積分による分布とともに図-4(1)に示す。各部分空間の累積分布がオーバーラップしながら 10^{-6} まで求められている。多少のばらつきはあるものの良好に累積分布関数が求められていることがわかる。また、 10^4 から 10^2 の曲線で、 10^{-3} 以下の部分でずれが大きくなっているが、その次の 10^{-5} から 10^{-3} の曲線ではずれが解消されている。これはたまたま小さな限界状態関数値のサンプルが得られても次の空間で解消されて真値に近づくという好ましい性質を持っていることを示している。ここで示した結果は一例であり、精度を定量的に評価するには乱数の種を替えた複数の計算を行う必要がある。精度については(3)で改めて述べる。

図-4(2)には各部分空間に発生させたサンプルの密度関数を示した。MCSの結果の限界状態関数値を z_i として、まず密度関数を、

$$f(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(z - z_i) \quad (14)$$

とおく。ここで、 δ はディラックのデルタ関数である。これに対してParzenウィンドウ¹⁷⁾処理を行って図化のための密度分布を求めた。最大値は1.0に基準化した。図-4(2)より、それぞれ上位の部分空間の密度分布の裾野部分に集中してサンプルが作成されている様子が見られる。

非線形の限界状態関数式(13)についても同様に累積分布と密度分布を求め、図-5に示す。図には数値積分により求めた累積分布も示しており、全体的には一致していることがわかる。また、線形限界状態関数の場合と比較すると急激に累積確率が小さくなっており、狭い領域にサンプルが集中していることもわかる。

(3) 提案方法による損傷確率の算定

乱数の種を替えて何回か同じ計算を行ったところ、概ね安定した結果は得られるものの、算定された損傷確率は真値との対応がよい場合と悪い場合がみられた。精度の不安定性の原因としてはMCMCの計算において、採択率が0となるサンプルの比率が高くなり、限界状態関数が小さい範囲へ安定して独立なサンプルを発生させることが困難になることが挙げられる。前述のように、採択判定の要因は2つあり、ひとつは発生させたサンプルが定義域である(0,1)の範囲内か、もうひとつは部分空間内か、の判

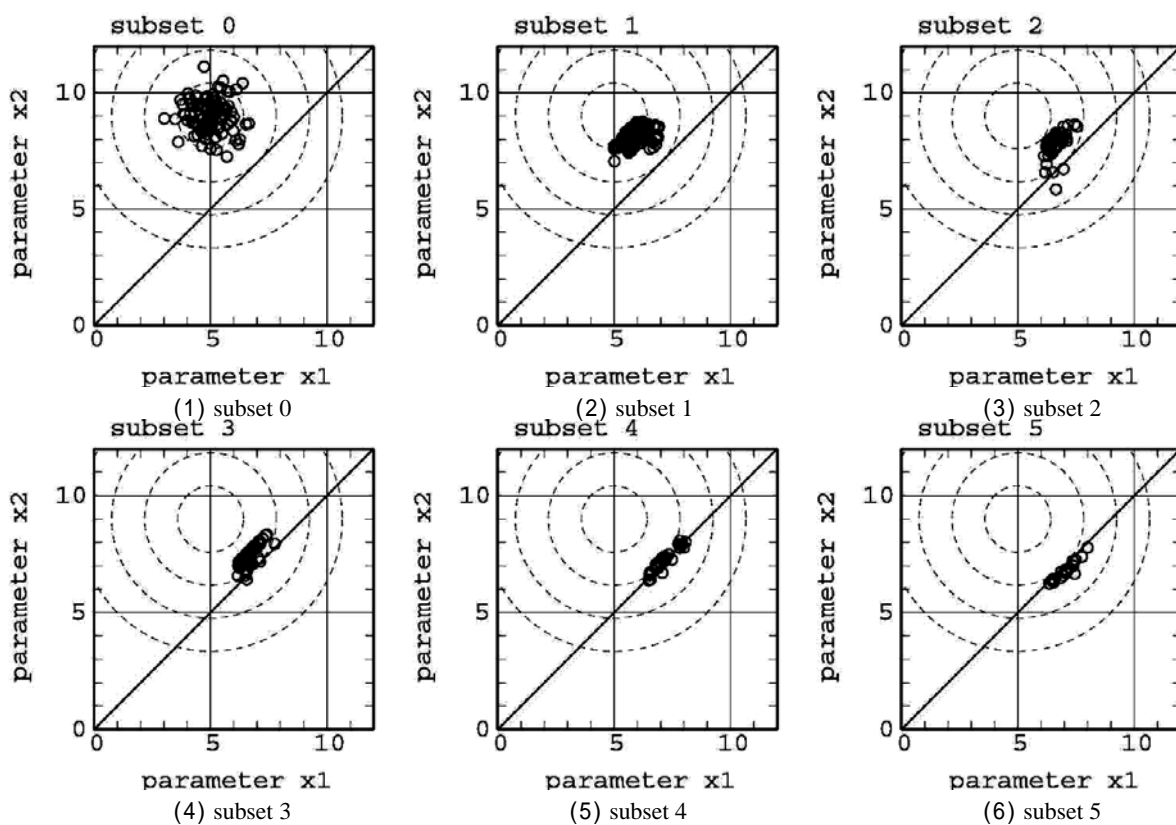


図-2 線形限界状態関数に対して提案手法により発生させたサンプル

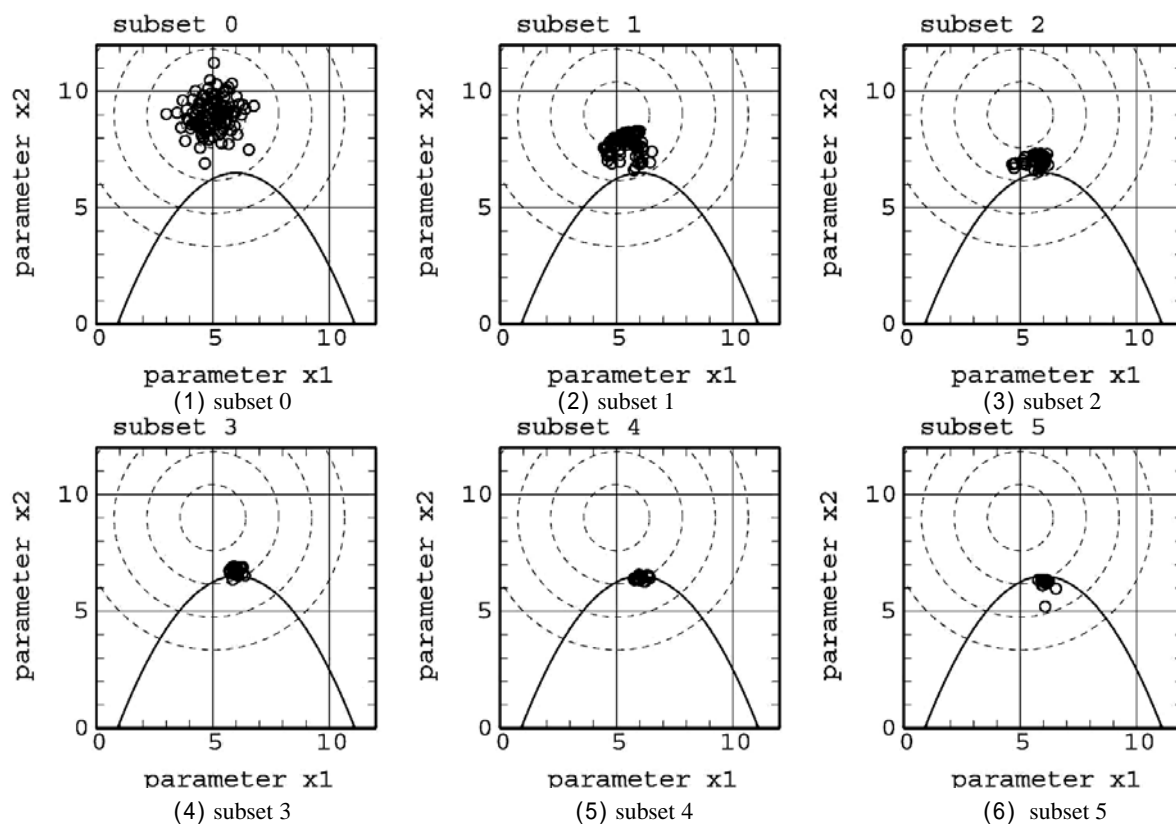
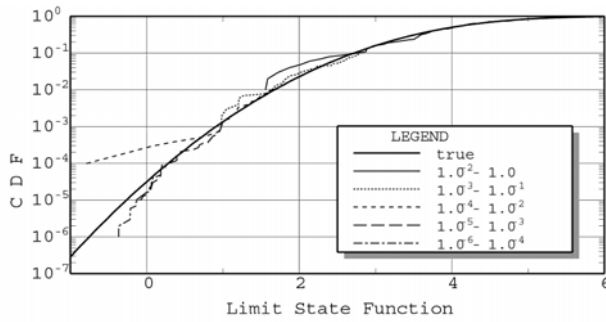
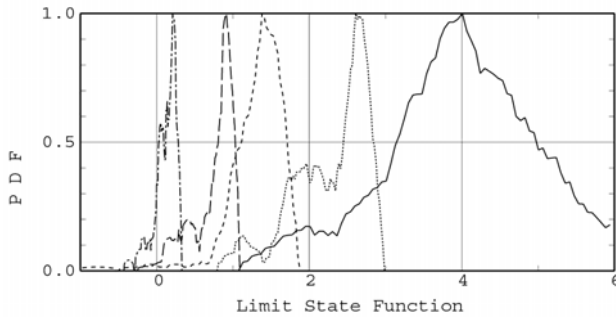


図-3 非線形限界状態関数に対して提案手法により発生させたサンプル

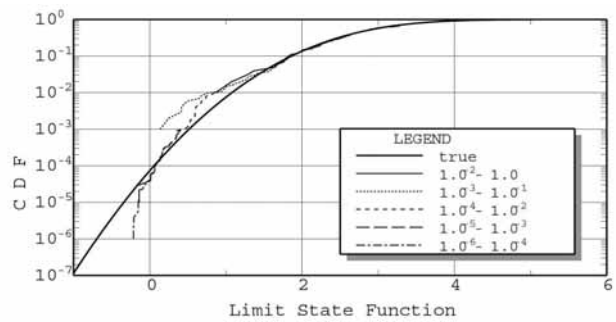


(1) 累積分布

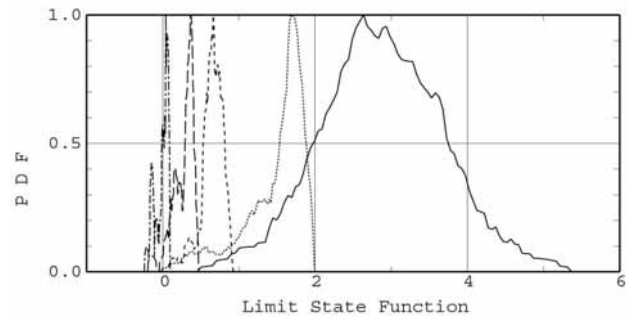


(2) 各部分空間の基準化した密度分布

図-4 線形限界状態関数に対して算定したサンプルの分布



(1) 累積分布



(2) 各部分空間の基準化した密度分布

図-5 非線形限界状態関数に対して算定したサンプルの分布

定である．後者では限界状態関数の計算をする必要があり一般に計算量が大きくなるが，前者は単純に所定の解空間にあることを確認するだけなので非常に計算量が少ない．

そこで，式(10)の一様分布の幅 a に関して大きいものから小さいものまで n 個（以下，サンプラーの個数と記す）用意し，解領域の判定 $I_{(0,1)}(u)$ のみ n 回の更新，判定を行った後，部分空間の判定 $I_{Fi}(u)$ を行うこととした．サンプラー1のパラメタ a （式(10)）を0.05とし，これを a_1 とおく．それに対してサンプラー j のパラメタを $a_j=(1/10) a_{j-1}$ と定義して， n 個のサンプラーを用いる場合はサンプラー1から n を用いることとする．

サンプルサイズが100の場合は得られる損傷確率のばらつきが大きくなり（変動係数が1.0程度）定量的な議論が困難であったためサンプルサイズを大きくし， $n_r=500$ としてsubset法を用いて解の絞り込みを行い，式(13)に関する損傷確率の算定を行った．それでも総試行回数は2500であり， 7.33×10^{-5} の確率を求めることを考えると効率的である．サンプラー個数が1,3,5,7,10の場合について，乱数の種を替えた計算を50回行って求めた損傷確率の平均値と平均値 \pm 標準偏差を図-6に示す．サンプラー個数1個の場合の平均-標準偏差は負になったため 10^{-6} で置き換えた．平均値についてはサンプラー個数が1個の場合は真値である 7.33×10^{-5} よりも小さいが，サンプ

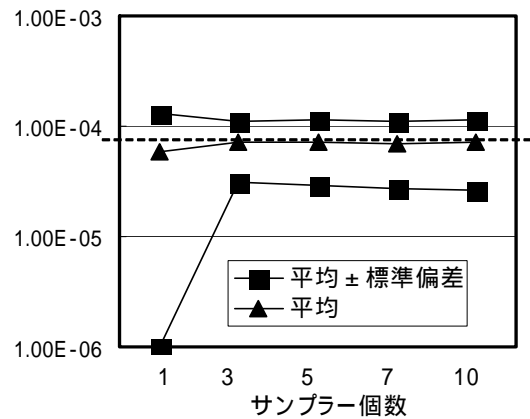


図-6 サンプラーの個数と算定された損傷確率の平均と標準偏差（乱数の種 50 回変更）

ラー個数3個以上の場合はほぼ真値と一致している．標準偏差に関しては3個以上の場合は概ね一定で，サンプラー個数1個の場合に比べて大幅に精度が改善されている．なお，前述の図-2,3はサンプラー個数10個の場合について計算した一例である．

4．低損傷確率算定への適用例

筆者の一人は限界指標を用いて効率的に損傷確率を算定する方法を提案し，いくつかの問題に適用してきた⁸⁾⁻¹³⁾．ここでは上記のsubset法を用いて限界指標を算定することで，さらなる効率化を図る．すな

わち，ここで提案する方法は最も感度が高い変数については限界指標として限界状態関数から分離し，残りの変数についてはsubset法により効率的に条件付き確率（損傷度曲線）を算定する方法と解釈することができる．

まず，限界指標を用いた損傷確率あるいは損傷度曲線の算定方法について概要を示した後，適用例を示す．

(1) 限界指標を用いた損傷確率算定法の概要¹⁰⁾

限界状態関数 g を用いて損傷領域を以下のように定義する．

$$g(S, x_R) < z_0 \quad (15)$$

ここで， S は感度が高く限界状態関数から分離する不確定変数， x_R ， z_0 はその他の不確定変数及び損傷を定義する閾値である． x_R ， z_0 が確定的に与えられたときに $g(S, x_R) = z_0$ が成り立つ S を逆算する関数が $R(z_0, x_R)$ で与えられるとする． R が z_0 に対して単調増加あるいは単調減少とすると，式(15)で定義される損傷領域は次式でも表現できることになる．

$$R(z_0, x_R) < S, \text{ あるいは } R(z_0, x_R) > S \quad (16)$$

この R を限界指標と定義する．簡単のため，以下の議論では $R < S$ の場合についてのみ式を示す．ここで， S とその他の不確定変数に関する確率密度関数が分離できると仮定する．後述の例題では地震荷重と物性値の不確定性の間の独立性を仮定することに相当し，多くの場合妥当な仮定である．

$$f(S, x_R) = f_S(S) f_{x_R}(x_R) \quad (17)$$

以上の条件のもとで損傷確率は以下の式で求めることができる．

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{g < z_0} f(S, x_R) dS dx_R \\ &= \int_{R < S} f_S(S) f_{x_R}(x_R) dS dx_R \\ &= \int \left(\int_{R < S} f_S(S) dS \right) f_{x_R}(x_R) dx_R \\ &= \int \left(\int_{R(z_0, x_R)}^{\infty} f_S(S) dS \right) f_{x_R}(x_R) dx_R \quad (18) \\ &= \int \{1 - F_S(R(z_0, x_R))\} f_{x_R}(x_R) dx_R \end{aligned}$$

また， S に対する条件付き損傷確率は同様にして次式で求めることができる．

$$\begin{aligned} F_R(S) &= \int_{R < S} f(S, x_R) dx_R \\ &= \int U(S - R(z_0, x_R)) f_{x_R}(x_R) dx_R \end{aligned} \quad (19)$$

ここで， $U(x)$ はステップ関数であり， x が非負であれば 1.0，負であれば 0.0 であることを表している． S を地震動強度と考えると式(19)は地震 PSA で用いられる損傷度曲線に他ならない．

式(18)(19)についてMCSによって得られたサンプル実現値を用いて積分を行うことを考える．確率密度関数 $f_{x_R}(x_R)$ に従って発生させた n 個のサンプル $x_R^{(j)}$ ($j=1, n$)及びディラックの関数を用いて，確率密度関数 $f_{x_R}(x_R)$ に関して次のように近似表現を行う．

$$f_{x_R}(x_R) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta(x_R - x_R^{(j)}) \quad (20)$$

これを式(18)に代入して積分を実行すると損傷確率を算定する次式を得る．

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - F_S(R(z_0, x_R^{(j)}))\right) \quad (21)$$

同様にして，式(20)を式(19)に代入して積分を実行すると次式で損傷度曲線が求められる．

$$F_R(S) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U(S - R(z_0, x_R^{(j)})) \quad (22)$$

計算手順としては確率密度関数 $f_{x_R}(x_R)$ に従って発生させたサンプルから限界指標 R を求め， S 以下となる比率を算定することで $F_R(S)$ が求められる． R の算定は通常の z_0 の計算よりも一般に労力がかかるものの，一回のMCSで一本の損傷度曲線を求めることができ多くの場合効率的である．

(2) 橋脚の耐震性評価への適用

RC 橋脚を対象に限界指標として入力地震動の最大加速度を用いた損傷度曲線の算定を行う．検討に用いたモデルを図-7 に示す．橋脚の限界状態としては，降伏耐力，せん断耐力及び変形性能が考えられるが，ここでは一例として変形性能に注目して損傷度曲線の算定を行う．

限界加速度は次の手順に従って求めた．まず，2次元非線形フレーム解析を用いてプッシュオーバー解析を行い，作用荷重と橋脚の水平変位の関係を算定する．次にエネルギー一定則の考え方と許容塑性率を用いて，荷重 - 変位関係より橋脚に損傷を生じさせる最小の水平荷重を算定する．橋脚の終局変位の算定方法は平成 8 年制定のコンクリート標準示方書¹⁸⁾に従った．この水平荷重及び橋脚の固有周期，

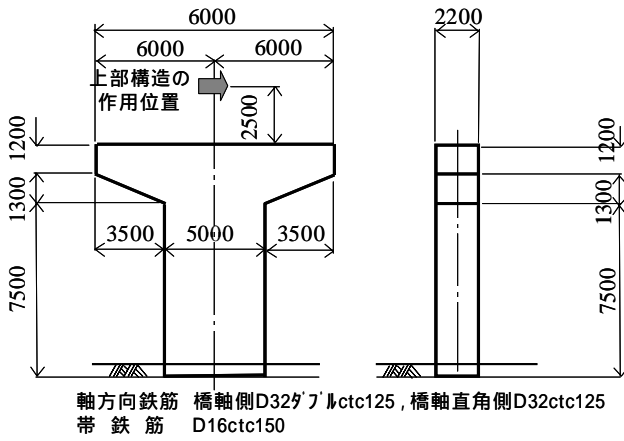


図-7 例題とした橋脚の概要

表-1 不確定要因の統計量

不確定要因		平均値 μ	標準偏差	変動係数	
構造物の材料特性	コンクリート	圧縮強度 (N/mm ²)	31.0	1.2	0.04
	呼び強度 24.0(N/mm ²)	引張強度 (N/mm ²)	$f_t=0.23f_c^{2/3}$	0.093 μ	0.093
		弾性係数 (kN/mm ²)	$E_c=8.39f_c^{1/3}$		
	鉄筋 SD295	降伏強度 設計300(N/mm ²)	370.0	18.5	0.05
弾性係数 設計210(kN/mm ²)		195.0	2.0	0.01	
耐力算定式(韌性率評価式)		1.0 × 計算値	0.51 μ	0.51	

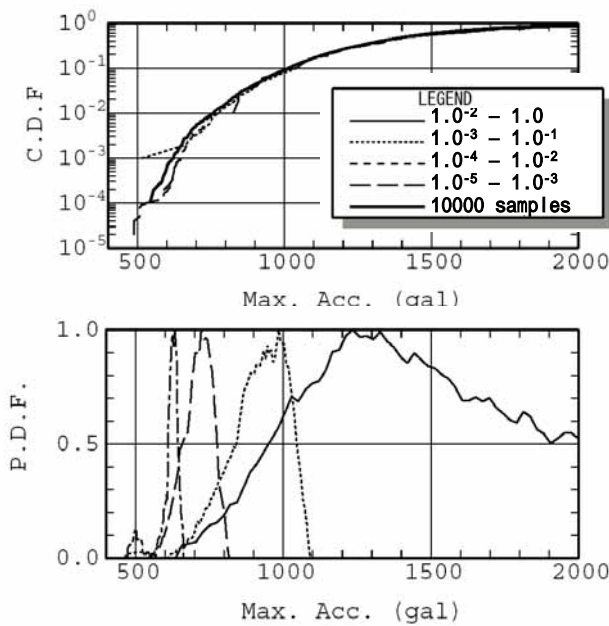


図-8 橋脚モデルの損傷度曲線と発生させたサンプル分布

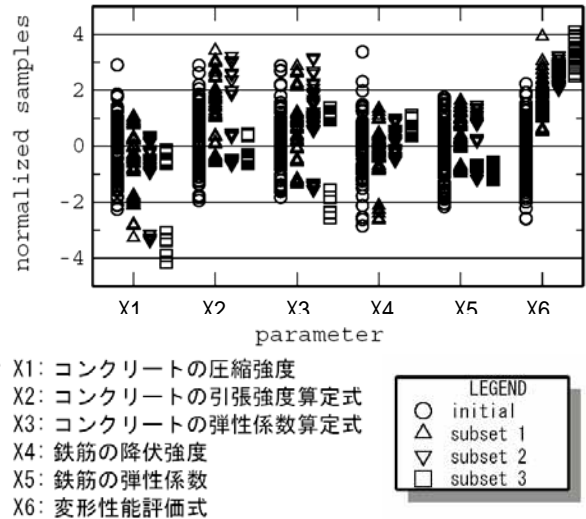


図-9 橋脚モデルの基準化されたサンプル

重量により限界等価水平震度を求め、それを加速度に置換えて限界加速度を算定する。エネルギー一定則の考え方には設計上の配慮があり安全側となることから大きめの損傷確率が算定される。

ばらつき要因としてはコンクリート、鉄筋の材料特性と変形性能評価式を考慮した。各変数は互いに独立と仮定している。これらについてまとめて表-1に示す。検討モデルや限界加速度算定法の詳細については文献 8)を参照されたい。

以上の条件で限界地震動指標に関するMCSを実施して損傷度曲線を算定した。まず通常のラテン方格法によるサンプルサイズ10000回のMCS (10^{-3} レベルを変動係数30%で求めるのに必要な回数)を行った。それに対してサンプルサイズ100回のMCSを4回行う場合の提案方法を実施した。前者と比較すると、

計算量は1/20以下である。2(1)に示したパラメータは $n_t=100$, $n_s=10$, サンプラー個数は10とした。それぞれ損傷度曲線(累積分布)を求めて図-8に示す。提案法による損傷度曲線はサンプルサイズ10000回のMCSによる損傷度曲線とよく一致しており、有効に機能していることがわかる。

発生させたサンプルについて標準正規分布に変換し、図-9にまとめて示す。確率変数は7種類ありそれぞれについて初期の空間(全空間)と3つの部分空間で発生させたサンプルを示している。コンクリートの圧縮強度は部分空間が絞り込まれるに従い小さい方向へシフトしていることがわかる。また、変形性能評価式に関する不確定係数は逆に大きくなっている。その他の変数についてはあまり明確な傾向はみられない。このように各部分空間に発生させた

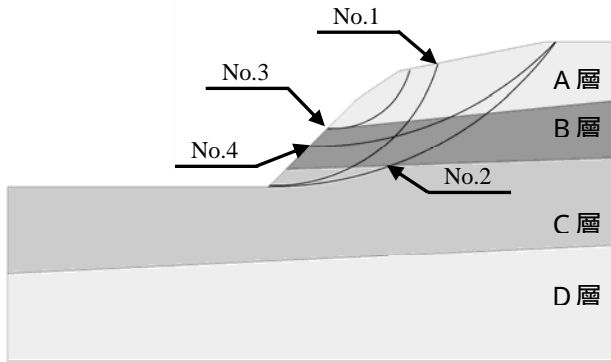


図-10 斜面モデルの層区分および想定すべり線

表-2 斜面モデルの不確定要因

地盤物性値	A層	B層	C層	D層	基盤	変動係数
単位体積重量 (kN/m ³)	17.5	17.5	16.5	16.0	16.0	0.05
粘着力 (kN/m ²)	15.0	50.0	100.0	600.0	-	0.40
内部摩擦角 (°)	10.0	30.0	30.0	35.0	-	0.10
初期せん断弾性係数 (×10 ³ kN/m ²)	40	71	152	261	408	0.25
ポアソン比	0.45	0.45	0.42	0.42	-	-

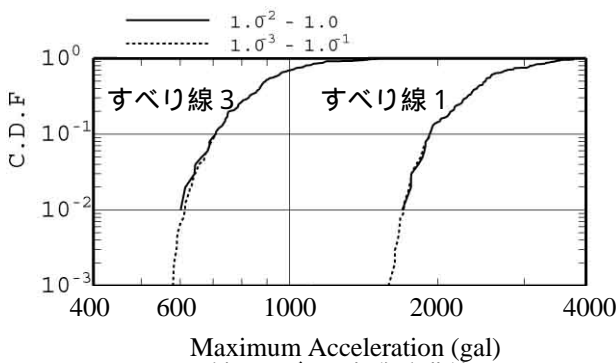


図-11 斜面モデルの損傷度曲線

サンプルを調べることにより各変数についての感度を調べることができる。

(3) 斜面の地震時安定問題

動的2次元FEM解析に基づき、斜面の地震時安全性に関する損傷度曲線の算定を行う。検討に用いたモデル、すべり線を図-10に、各層の地盤物性値を表-2に示す。A層～D層のせん断弾性係数および減衰定数はせん断ひずみ依存性を有するものとした。また入力地震動としてはタフト波（1952年Kern County地震、S69E成分）を用いた。不確定要因は各

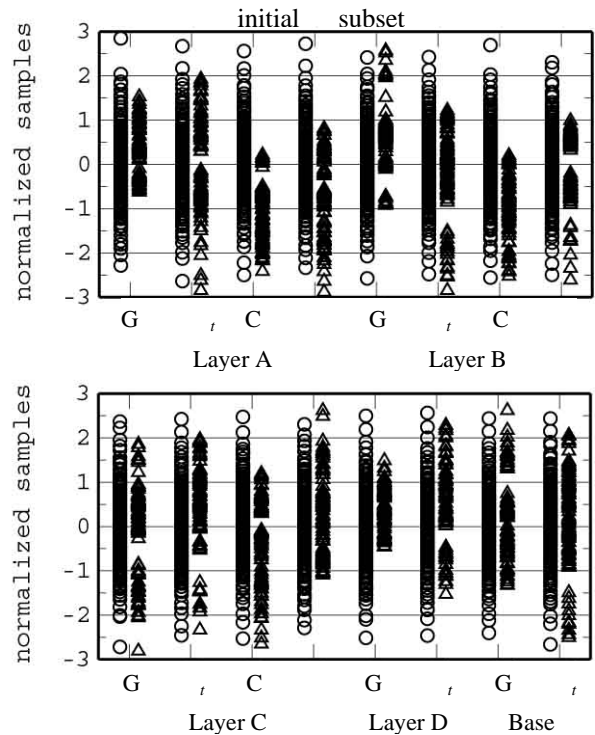


図-12 斜面モデルの基準化されたサンプル

G：初期せん断剛性， γ ：単位体積重量，
C：粘着力， ϕ ：内部摩擦角

層のせん断弾性係数や強度など全部で16個とし、それぞれの変動係数を表-2に示した。なお、各変数は互いに独立と仮定した。

地盤物性のひずみ依存性を考慮する方法として等価線形化法を想定し、ひずみ依存性の考慮と限界加速度算定のための繰り返し計算を同時に行うことにより限界加速度算定の効率化を図った。いくつかの試算によると通常の等価線形解析の繰り返し計算と大差ない繰り返し回数で収束することを確認している¹⁰⁾。検討に用いたモデル、地震時斜面安定問題の限界加速度算定法の詳細は文献9)10)を参照されたい。

以上の条件で試行回数100回のラテン方格法によるMCS、そのうち限界加速度の小さい方から10個を用いた部分空間のMCMCを実施し、図-11に示す損傷度曲線を算定した。対象としたすべり線は1と3である。各不確定要因について発生させたサンプルをそれぞれ標準正規分布に変換して図-12に示す。当然のことながら強度については部分空間では小さい方に偏ってサンプルが作成されている。一方、B層のせん断剛性については大きい方に偏ってサンプルが作成されていることがわかる。

この問題では動的2次元FEMを用いた等価線形解析を基本としており、サンプル100回の計算でも多くの計算時間を要する。こうした計算に時間のかかる問題に対してこそ本手法の価値が発揮される。な

お、今回示した例題においてMCMCの判定などに要する計算時間は限界加速度算定に比べてほとんど無視し得るレベルであり、計算時間はほぼ試行回数に比例する。

5. おわりに

本論文ではsubset法、MCMCを用いた効率的な損傷確率算定方法について提案し、数値積分が可能な簡単な限界状態関数を用いてその有効性の確認を行った。さらに、橋脚の耐震性、斜面の耐震性について限界指標を用いる方法に提案法を取り込み、その適用例を示した。本手法は自動的に感度解析を行いながら、危険な領域にサンプル発生を絞り込んでいく方法と解釈することができる。すなわち、適応型MCS手法であり、その応用範囲は大変広い。今後、リスク評価、PSA評価の重要性が高まる中、大変有望な手法と考えている。

今後の課題としては採択率1.0となるサンプルの比率を向上させるための工夫が挙げられる。本研究では複数のマルコフ連鎖列を計算しているが、複数のマルコフ連鎖よりもひとつ連鎖を追いかけた方が精度がよいとの報告もある。また、採択率を向上させるための工夫としてHit and Run アルゴリズムなど様々な方法が提案されている¹⁵⁾。これら性能を向上させるための工夫について今後取り組んでいくとともに、耐震問題を扱う上で大変重要なテーマである初期通過問題についても取り組んでいきたい。

付 録

2.(2)の手順で目標分布 (x) に従うサンプルを発生させることができることを文献15)の解説を補足して以下に示す。

確率密度分布 $p(x_{k+1}|x_k)$ は候補が採択された場合と棄却された場合に分けてtransition kernelと呼ばれる次式で表すことができる。

$$p(x_{k+1}|x_k) = q(x_{k+1}|x_k)\alpha(x_k, x_{k+1}) + \delta(x_{k+1} - x_k) \left(1 - \int q(Y|x_k)\alpha(x_k, Y)dY\right) \quad (A1)$$

ここで、 δ はディラックのデルタ関数である。

$\int \pi(x_k)p(x_{k+1}|x_k)dx_k$ が目標分布 (x_{k+1}) と等価なことを示す。準備として、まず、 x_k と x_{k+1} に関して次の関係があることを示す。

$$\begin{aligned} \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)\alpha(x_k, x_{k+1}) \\ = \pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})\alpha(x_{k+1}, x_k) \end{aligned} \quad (A2)$$

本文中の式(6)に示した $b(x_k, x_{k+1})$ はその定義式から次の関係があることがわかる。

$$\begin{aligned} b(x_k, x_{k+1}) &= \frac{\pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})}{\pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)} \\ &= \frac{1}{b(x_{k+1}, x_k)} \end{aligned} \quad (A3)$$

まず、 $b(x_k, x_{k+1}) < 1$ の場合について考える。この場合、次式が成立することに注意する。

$$\begin{aligned} \alpha(x_k, x_{k+1}) &= b(x_k, x_{k+1}) \\ \alpha(x_{k+1}, x_k) &= 1 \end{aligned} \quad (A4)$$

式(A3)(A4)を式(A2)の左辺へ代入すると、

$$\begin{aligned} \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)\alpha(x_k, x_{k+1}) \\ = \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k) \frac{\pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})}{\pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)} \\ = \pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1}) \\ = \pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})\alpha(x_{k+1}, x_k) \end{aligned} \quad (A5)$$

となり、式(A2)が成立する。 $b(x_k, x_{k+1}) \geq 1$ の場合は

$$\begin{aligned} \alpha(x_k, x_{k+1}) &= 1 \\ \alpha(x_{k+1}, x_k) &= b(x_k, x_{k+1}) \end{aligned} \quad (A6)$$

に注意すると、以下の様にして式(A2)が誘導される。

$$\begin{aligned} \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)\alpha(x_k, x_{k+1}) \\ = \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k) \\ = \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k) \frac{\pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})}{\pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})} \\ = \pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1}) \frac{\pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)}{\pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})} \\ = \pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})\alpha(x_{k+1}, x_k) \end{aligned} \quad (A7)$$

したがって、式(A2)の関係を確認することができた。

式(A1)に (x_k) を乗じ、式(A2)の関係に注意すると次の対称な関係式(detailed balance equation)が得られる。

$$\begin{aligned} \pi(x_k)p(x_{k+1}|x_k) &= \pi(x_k)q(x_{k+1}|x_k)\alpha(x_k, x_{k+1}) \\ &+ \pi(x_k)\delta(x_{k+1} - x_k) \left(1 - \int q(Y|x_k)\alpha(x_k, Y)dY\right) \\ &= \pi(x_{k+1})q(x_k|x_{k+1})\alpha(x_{k+1}, x_k) \\ &+ \pi(x_{k+1})\delta(x_{k+1} - x_k) \left(1 - \int q(Y|x_{k+1})\alpha(x_{k+1}, Y)dY\right) \\ &= \pi(x_{k+1})p(x_k|x_{k+1}) \end{aligned}$$

(A8)

式(A8)の両辺を x_k について積分すると,

$$\int \pi(x_k) p(x_{k+1} | x_k) dx_k = \int \pi(x_{k+1}) p(x_k | x_{k+1}) dx_k = \pi(x_{k+1}) \quad (A9)$$

となる。以上により、 x_k が目標分布 $\pi(x)$ に従う場合、 x_{k+1} も $\pi(x)$ に従うことがわかる。

参考文献

- 1) 国際標準化機構 (ISO) : ISO2394, *General principles on reliability for structures*
- 2) CEN: Eurocode 1, *Basis of design and actions on structure*
- 3) 星谷勝, 石井清: 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986
- 4) 津田孝夫: モンテカルロ法とシミュレーション (三訂版), 培風館, 1995
- 5) 伏見正則: 確率的方法とシミュレーション, 岩波講座応用数学, 1994
- 6) 応用力学シリーズ 6, 構造物系の非線形・不確定モデリング, 日本建築学会, 1998.
- 7) Schueller, G.I., Bucher, C., Bourgund, U.: Ouypornprasert, W., On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probabilities, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.4, No.1, pp.10-18, 1989.
- 8) 吉田郁政, 鈴木修一: 限界地震動指標を用いた損傷確率の効率的な算定方法, 構造工学論文集, pp.201-206, 2003
- 9) 吉田郁政, 秋吉良樹, 北爪貴史: 限界地震動を用いた斜面の損傷確率の算定法, 土木学会第 58 回年次学術講演会, III, 2003
- 10) 大鳥靖樹, 吉田郁政, 石川博之, 武田智吉: 限界地震動指標による土構造物の年損傷確率評価, 第 5 回構造物の安全性・信頼性に関する国内シンポジウム, 講演論文集, pp.695-700, 2003
- 11) 興野俊也, 赤石沢総光, 吉田郁政, 鈴木修一, 長舩徹: ケーソン堤の滑動破壊モードに着目した効率的損傷確率算定手法について, 海岸工学論文集, 第 50 巻, pp.896-900, 2003
- 12) 吉田郁政, 原田光男, 福本幸成, 鈴木修一, 安中正: LCC に基づく地中 RC 構造物の耐震設計に関する研究, 構造工学論文集, Vol.47A, pp.267-275, 2001
- 13) 鈴木修一, 赤石沢総光, 吉田郁政: 地中 RC 構造物の劣化を考慮した常時・地震時の信頼性評価に関する基礎研究, 土木学会第 57 回年次学術講演会, VI-131, pp.261-262, 2002
- 14) Au, S-K. and Beck, J. L.: Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.129, No.8, pp.901-917, 2003
- 15) Gilks, W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.J.: *Markov chain Monte Carlo in practice*, Chapman & Hall, 1996.
- 16) Ang, A. H-S., Tang, W. H. (訳: 伊藤学, 亀田弘行): 土木・建築のための確率・統計の基礎, 丸善, p.260, 1977
- 17) 大崎順彦: 新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994
- 18) 土木学会: コンクリート標準示方書 (平成 8 年制定) 耐震設計編, 1996

(2003. 11. 5 受付)

EFFECTIVE ESTIMATION METHOD OF LOW FAILURE PROBABILITY BY USING MARKOV CHAIN MONTE CARLO

Ikumasa YOSHIDA and Tadanobu SATO

The necessity of effective method to estimate low failure probability is increased from the standpoint of life cycle cost, risk and probabilistic safety assessment (PSA). We proposed an effective Monte Carlo Simulation method combining with the progressive subspace concept which searches distributed failure event regions step by step. Samples to search the failure region are generated in each subspace by using MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Efficiency of MCMC is improved by simplifying the sampling procedure based on a uniform distribution from which it is very easy to transform into arbitrary distributions such as normal and log-normal distributions. Effectiveness of the proposed method is verified through numerical examples with simple limit state functions, then fragility curves of a bridge pier and a slope are calculated by the proposed method.