

損傷度推定のための逆問題の非適切性と正則化

Regularization and ill-posedness of inverse problem for damage detection

吉田郁政*, 我妻克明**, 天野由華**, 金 哲佑***, 川谷充郎****

Ikumasa Yoshida, Katsuaki Agatsuma, Yuka Amano, Chul-Woo. Kim and Mitsuo Kawatani

*博 (工), 武蔵工業大学教授, 工学部都市工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

** 元武蔵工業大学学生, 工学部都市工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

***博 (工), 神戸大学学術推進研究員研究員, 大学院工学研究科 市民工学専攻 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

****工博, 神戸大学教授, 大学院工学研究科 市民工学専攻 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

In order to overcome the ill-posedness, two methods are studied. One is to add prior information term to objective function, the other is to narrow solution space. In the first method, we compare Gauss and Laplace distribution to express uncertainties of prior information. It is indicated that Laplace type prior information is useful when the number of damaged points is small. The estimation performance, however, is bad when observation noise is considered or the number of the damaged point increases. In the second method, parameters which indicate location and level of damage are optimized. The performance of the damage detection is much improved in the case that noise is considered and the number of damaged point is increased.

Key Words: damage identification, ill-posedness, prior information, health monitoring, inverse problem

キーワード: 損傷推定, 非適切性, 事前情報, ヘルスモニタリング, 逆問題

1. はじめに

既存構造物の適切な維持管理が中心的課題のひとつとなっている現代において, その損傷度評価手法の開発は大変重要なテーマである. 損傷度評価は観測情報からモデルを推定する逆問題の一種として解釈することができ, その重要なテーマとして非適切性^{1), 2)}の問題が挙げられる. 基本的には解空間の大きさに対する観測情報の不足に起因する解の不安定さの問題であり, 情報の追加や考慮する解空間の縮小, 限定によって回避することができる.

質のよい観測情報を追加することができれば一番好ましいが実問題においてそれは不可能なことが多い. そのため解に関する先験的な情報を加えることがよく行われ, これは目的関数における正則化項, 適切化項, ペナルティ項, 事前情報項あるいは先験情報項と様々な呼ばれ方をするが基本的にはなんらかの情報の追加である. 以下, こうした情報の追加を事前情報と呼ぶことにする.

事前情報は解に関する先験的な値からの残差二乗和として目的関数に加えられることが多く, 確率論からみると事前情報の不確定性をガウス分布によって仮定していることに相当する. しかし, 二乗和である必然性はなく, 残差の絶対値の和で考えると, 不確定性をラプラス分布で仮定することになり解の性質が変わる.

状態空間モデルを用いた, 時系列のノイズ除去の問題においてトレンド成分が緩やかに変化している場合にはガウス型のプロセス (システム) ノイズが有効であるが, 急激な変化に対してはコーシー分布のような非ガウス分布の方がよいことが北川³⁾により指摘されている. 状態空間モデルにおけるプロセスノイズは各時刻における事前情報項と同様な役割を担っている⁴⁾. この北川らの考え方を基に吉田らは振動中に損傷を受け動特性が急激に変化する問題に対しては非ガウスノイズを用いたモンテカルロフィルターが有効なことを示した⁵⁾. また, 空間方向においても特定の部位の値だけが変化するような問題ではラプラス分布の方がよいことを指摘した^{6), 7)}. しかし, 事前情報項の重み (不確定性の大きさ) は試行錯誤的に与えておりその決め方は今後の課題として残されている.

非適切性に対するもうひとつの対処法は解空間の限定あるいは縮小である. 損傷度評価において構造物全体の特性が変化するのではなく, 特定の部位が損傷によって変化すると仮定すると構造物全体の損傷度を推定する必要はなく, 劣化した部分だけを推定すればよいことになる. 未知パラメタの設定の考え方を変更し, 損傷が生じた場所とその損傷の程度を表すパラメタを未知とすることで大幅に解空間を小さくすることができる.

本研究では2つのテーマについて検討を行う. まず, ラ

プラス分布を用いた場合の事前情報項と観測情報項の重みを最尤法から決める方法について定式化を行い、ノイズの影響や損傷点数が増えた場合の適用性について検討する。また、未知パラメタの設定法を変更し、損傷が生じた場所とその損傷の程度を表すパラメタを推定するように定式化した場合について同様の検討を行い適用性の検討を行う。検証のための数値計算の対象とした問題は交通振動を用いた橋梁の損傷度評価とした。

2. 適切化のための事前情報と最尤法による重みの推定法

(1) ガウス分布に従う場合の目的関数

確率論から定式化を行う逆解析の基本的考え方は既往の文献 4), 8)などに詳細に述べてあるので、ここでは記号の定義と基本式、最終的な式だけを簡単に示す。未知パラメタベクトル \mathbf{x} について期待値とその共分散行列が事前情報として与えられているとする。

$$\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}], \quad \mathbf{M} = E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T] \quad (1)$$

ここで、 $E[\mathbf{x}]$ は \mathbf{x} の平均値を表す記号とする。観測量ベクトル \mathbf{z} が次式の観測方程式で与えられるとする。

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (2)$$

$\mathbf{H}(\mathbf{x})$ は観測量を推定するモデルで未知パラメタベクトル \mathbf{x} の関数として表される。 \mathbf{v} は観測量誤差を表し、その共分散行列 \mathbf{R} が与えられるとする。

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] \quad (3)$$

未知パラメタの事前情報に関する不確定性と観測量誤差が互いに独立なガウス分布に従うと仮定し、事前情報も観測量の一部として考えて定式化⁹⁾して尤度関数を求め、 -2 を乗じると、パラメタ推定のための次の目的関数を誘導することができる⁸⁾。

$$J = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) + \ln|\mathbf{M}| + \ln|\mathbf{R}| + (n+m) \ln(2\pi) \quad (4)$$

ここで、 n : 未知パラメタベクトルの大きさ、 m : 観測量ベクトルの大きさを表している。未知パラメタベクトルだけを推定する場合には第1項と第2項だけを考慮すればよいが、後述のように事前情報と観測情報の不確定性の大きさも推定するには第3, 4項も必要となる。本論文では事前情報項の重み、すなわち不確定性の大きさを未知量とあわせて同時に推定を行なう方法について論じるため、これらの項も考慮する必要がある。

\mathbf{M} , \mathbf{R} が対角行列でそれぞれ成分の大きさが同じ、すなわち互いに独立で各成分の分散 σ_M^2 , σ_R^2 が同じ大きさであると仮定する。

$$\mathbf{M} = \sigma_M^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{R} = \sigma_R^2 \mathbf{I} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{I} は単位行列である。この場合、目的関数は以下

の形となり、事前情報と観測情報の重みはそれぞれの不確定性を表す分散の比となっていることがわかる。

$$J = \frac{1}{\sigma_M^2} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - x_i)^2 + \frac{1}{\sigma_R^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(x))^2 + 2n \ln \sigma_M + 2m \ln \sigma_R + (n+m) \ln(2\pi) \quad (6)$$

最尤法によって分散の大きさ σ_M^2 , σ_R^2 を未知パラメタとして推定することが可能であるが、次のような工夫を行なうことで、最適化手法によって求める未知パラメタを1個減らすことができる。まず、次の関係式を式(6)に代入し、

$$\sigma_M^2 = c \sigma_{M0}^2, \quad \sigma_R^2 = c \sigma_{R0}^2 \quad (7)$$

c に関する停留条件より以下の式が誘導される。

$$\frac{\partial J}{\partial c} = -\frac{J'}{c^2} + \frac{n+m}{c} = 0 \quad (8)$$

変形して係数 c は以下の式で求めることができる。

$$c = \frac{J'}{n+m} \quad (9)$$

ここで、 $J' = \frac{1}{\sigma_{M0}^2} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - x_i)^2 + \frac{1}{\sigma_{R0}^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(x))^2$

式(7)及び(9)を式(6)に代入すると以下の目的関数を得ることができる。

$$J = (n+m)(1 + \ln(2\pi) + \ln(c)) + 2m \ln \sigma_{R0} + 2n \ln \sigma_{M0} \quad (10)$$

式(6)に基づく場合は未知パラメタベクトルに加え2つの分散 σ_M^2 , σ_R^2 についても最適化する必要があるが、式(10)の場合には2つの分散のうちどちらか一方を最適化の対象とすればよい。事前情報の重みを自動的に決める方法については本城^{10,11)}が ABIC を用いる方法を詳細に論じている。ここでは、次に述べるようにラプラス分布を用いる場合も想定しているため、比較的単純な定式化である最尤法に基づく方法を採用した。

(2) ラプラス分布に従う場合の目的関数

式(6)や(10)で表される目的関数は事前情報が互いに独立なガウス分布に従うとした場合、すなわち下記式で未知パラメタの事前分布が与えられると仮定している。

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

それに対して事前分布が以下のラプラス分布で表されると仮定する。

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x_i - \bar{x}_i|}{b}\right) \quad (12)$$

事前情報をラプラス分布とした場合の同時確率密度関数は以下の式(13)で表され、最尤法の考え方から式(14)の目的関数が誘導される。

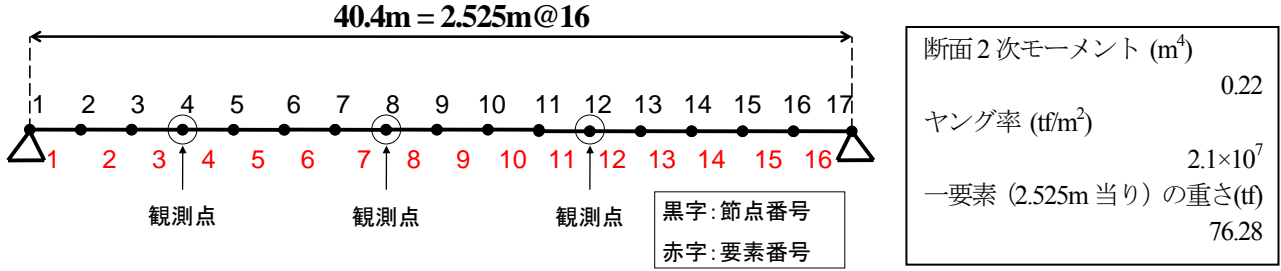


図-1 数値シミュレーションに用いた橋梁のモデル

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x_i - \bar{x}_i|}{b}\right) \times \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left(-\frac{(z_i - h_i(\mathbf{x}))^2}{2\sigma_R^2}\right) \quad (13)$$

$$J = 2n \ln(2b) + \frac{2}{b} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i| + m \ln(2\pi) + 2m \ln \sigma_R + \frac{1}{\sigma_R^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \quad (14)$$

この場合にもガウス分布の場合と同様にして、未知量を1個減らすことができる。まず、 $b = cb_0$ 、 $\sigma_R^2 = c\sigma_0^2$ と置いて式(14)に代入する。

$$J = 2n \ln(2cb_0) + \frac{2}{cb_0} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i| + m \ln(2\pi) + m \ln c + 2m \ln \sigma_0 + \frac{1}{c\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \quad (15)$$

係数 c を含む項と含まない項に分離して次式を得る。

$$J = 2n \ln(2) + 2n \ln(b_0) + 2m \ln \sigma_0 + m \ln(2\pi) + (2n + m) \ln(c) + \frac{1}{c} \left(\frac{2}{b_0} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i| + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \right) \quad (16)$$

係数 c について J を最小化する条件 $\partial J / \partial c = 0$ より次の関係が得られる。

$$\frac{\partial J}{\partial c} = (2n + m) \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{2}{b_0} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i| + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \right) = 0 \quad (17)$$

変形して次式を得る。

$$c = \frac{1}{2n + m} \left(\frac{2}{b_0} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i| + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(\mathbf{x}))^2 \right) \quad (18)$$

式(16)の最後の項に式(18)を代入して次式が得られる。

$$J = 2n \ln(2) + 2n \ln(b_0) + 2m \ln \sigma_0 + m \ln(2\pi) + (2n + m) \ln(c) + (2n + m) \quad (19)$$

未知パラメータベクトル \mathbf{x} に加え、 b_0 あるいは σ_0 の一方を最適化のためのパラメータとし、得られた c を乗じることで b 及び σ_R 両方のパラメータを得ることができる。

3. 交通振動を用いた損傷度推定の数値計算例

(1) 交通振動を用いた損傷度推定の考え方

交通振動を用いた損傷度推定を対象として損傷推定の具体例を示す。ただし、本論文の目的は逆問題の適切化法の議論であり、対象とする問題を限定する必要はない。そのため、損傷度推定手法の説明については簡単な記述にとどめる。詳細については文献(12)、(13)、(14)などを参照されたい。

路面凹凸を有する橋梁と車両の連成振動方程式は以下の式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{D}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb}(t) & \mathbf{C}_{bv}(t) \\ \mathbf{C}_{vb}(t) & \mathbf{C}_{vv}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{D}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb}(t) & \mathbf{K}_{bv}(t) \\ \mathbf{K}_{vb}(t) & \mathbf{K}_{vv}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \boldsymbol{\delta}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{bb}(t) \\ \mathbf{f}_{vv}(t) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ここで、 \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリックス、 \mathbf{D} 、 $\boldsymbol{\delta}$ は橋梁および車両の変位ベクトルを示す。また、添え字 bb 、 vv および bv は各々橋、車両および橋梁-車両連成項を表す。 $\mathbf{K}_{bb}(t)$ および $\mathbf{C}_{bb}(t)$ はそれぞれ車両の移動によって変化する橋梁の剛性および減衰マトリックスである。得られた橋梁-車両連成系の連立微分方程式は Newmark- β 法を用いて解くこととする。

橋梁のいくつかの場所で車両交通によって励起される振動を観測するとして、上記の計算から求められる振動時刻歴と観測時刻歴ができるだけ一致するように橋梁の剛性を逆解析し、初期状態からの剛性の低下分から損傷を推定する。

(2) 数値解析のためのモデル及び主な条件

検討の対象とした橋梁モデルを図-1 に示す。検討対象橋梁は支間 40.4m の単純合成鋼桁橋を想定した。トラックを走行させ、その時の交通振動を測定し、その応答振動から橋梁の損傷度を推定する。なお、仮定している路面凹凸データの詳細については文献(12)、(13)を参照されたい。本例題では、16 分割した各要素の曲げ剛性が損傷により低下すると仮定する。損傷度をこの低下の率によって定義する。すなわちまったく損傷のない状態であれば 1.0 であり、

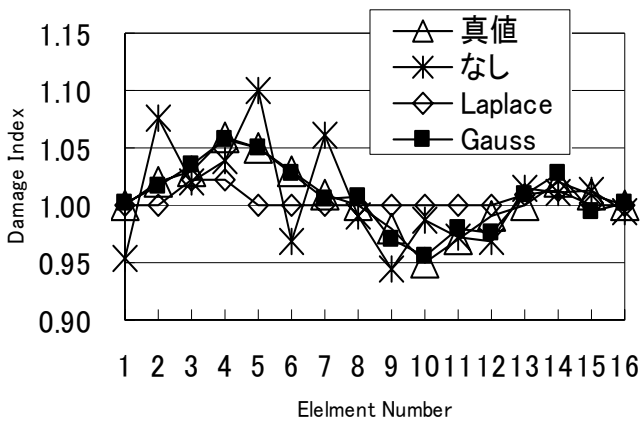


図-2 初期モデルの推定結果

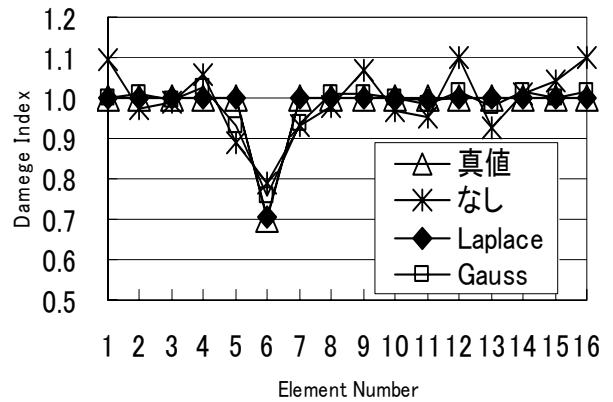


図-3 損傷1箇所の損傷推定結果

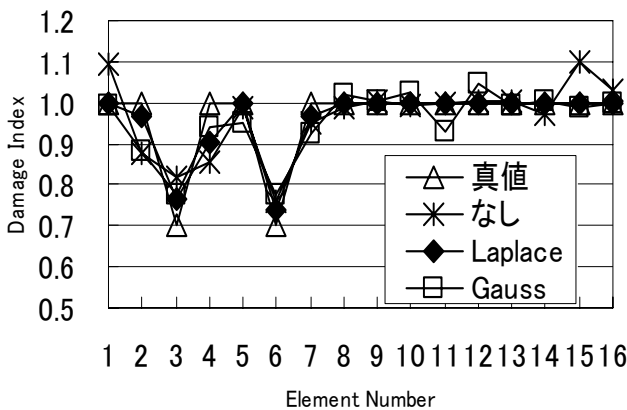


図-4 損傷2箇所場合の損傷推定結果

曲げ剛性が70%まで低下している場合には0.7となる。観測点は図-1に示すノード4, 8, 12の3点とした。

当例題では、事前情報や観測量誤差の不確定性は独立と仮定し、目的関数として式(10)あるいは(19)を用いる。未知パラメータ x は各要素の損傷度を、 z , $h(x)$ は観測および計算による応答時刻歴を表している。未知パラメータの事前情報としては健全な状態である1.0を与えた。目的関数の最小化にはDFP法¹⁵⁾を用いる。

(3) 初期モデルの推定

初期モデル、すなわち、健全な状態の曲げ剛性の推定を行う。損傷推定は健全な状態からの変化分として評価する必要があるため、初期状態の正確な把握が重要である。建設直後の構造物であっても想定どおりの構造物とは限らず、施工や材料のばらつき、モデル化(理想化、単純化)の誤差などが存在する。これらを含めて損傷度推定のための初期モデルを推定しておく必要がある。

初期モデルの剛性が図-2に示した「真値」のように分布していると仮定する。縦軸が損傷度(Damage Index)として示してあるが初期モデルの場合はある基準値に対する補正係数となっている。この曲げ剛性分布を有したモデルを基に応答計算を行い、ノード4, 8, 12の3点における応答加速度、速度の時刻歴を算定し、以下の剛性分布推定

のための観測量とした。ノイズはこのケースでは考慮していない。事前情報なしの場合、ガウス型事前情報、ラプラス型事前情報の場合の計3ケースについて計算を行った。ガウス型の場合は式(10)の、ラプラス型の場合は式(19)の目的関数の最小化から未知パラメータ(各要素の剛性の補正係数)の推定、および事前情報と観測情報の重みを決めるそれぞれの不確定性パラメータ(ガウス型の場合は標準偏差、ラプラス型の場合は b)の推定を行った。事前情報の平均値は全要素1.0とした。

推定された曲げ剛性分布を図-2に示す。事前情報を与えていない場合には推定結果がばらつき、真の分布とは異なっている。ガウス分布型の前情報をを用いた場合にはほぼ適切に分布が推定されており、良好な結果となっている。一方、ラプラス分布型の場合には推定値が1.0に近くなっており、真値とは異なった結果となった。このように全体的に事前情報からずれている場合にはガウス分布型の前情報が有効であることがわかる。

(4) 損傷推定

次に、損傷状態を想定し、損傷位置とその程度を推定するシミュレーションを行なった。損傷したモデルとして要素6の損傷度が0.7、その他の要素は全て1.0としたモデルを仮定する。その他の条件、計算方法は(3)と同様である。推定結果を図-3に示す。いずれのケースも要素6で損傷度の値が小さくなっているものの、事前情報なしの場合は推定値のばらつきが大きく、要素6以外においても損傷度が減少あるいは増加している。ガウス分布の場合は事前情報のなしの場合に比較して一致度が向上しているものの多少真値からのばらつきが見られる。一方、ラプラス分布の場合にはほぼ正確に推定ができており、大変良好な結果となっている。初期モデルのように全体的に少しずつ事前情報からずれている場合にはガウス型が有効であるが、特定の箇所がずれている場合にはラプラス型が有効であることが示されている。

次に損傷箇所を要素番号3と6の2点とした場合について同様の検討を行った。その結果を図-4に示す。事前情報なしのケースの推定結果はばらついている。ガウス型とラプラス型の差はあまり顕著ではなくなっているが多

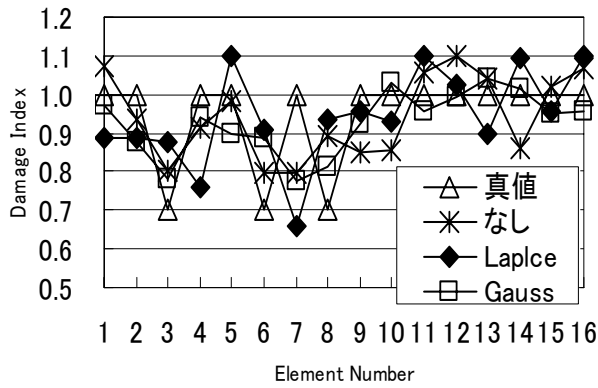


図-5 損傷3箇所での損傷推定結果

少ラプラス型の方がよい結果となっている。さらに損傷点数を3点とした場合の結果を図-5に示す。ガウス型、ラプラス型ともに推定結果は真の分布とは異なり損傷点の推定が困難であることがわかる。

(5) 観測ノイズの影響

これまでに示した検討例では観測情報のノイズは考慮していない。そこで、最大振幅に対して5%のホワイトノイズを与えた観測量を作成して損傷推定を行った。ラプラス分布を仮定した場合に大変良好な結果が得られた損傷点数1点の場合について計算を行い、その結果を図-6に示す。どのケースにおいても推定分布はばらついており、真の分布と異なっている。つまり、ラプラス分布を用いた推定は損傷点数が少なく、ノイズが小さい場合には有効であるが損傷点数が複数あるいはノイズがある程度大きくなると精度が大幅に低下することがわかる。

4. 解空間の縮小による適切化

これまでの定式化では対象構造物を n 個の領域にわけ、全領域についての損傷度を推定した。そのためモデルを細かく分割した場合には未知量の数が非常に多くなる。そこで、損傷点数を仮定し損傷位置とその損傷度を推定するように定式化を変更した。いくつかの損傷点数を仮定して最尤推定を行い、情報量基準 AIC を算定し、AIC が最小となる損傷点数とそのときの損傷点位置、損傷度を推定値とする。すなわち、損傷点数については AIC によるモデル選択の問題として推定する。2章で述べた方法を定式化1、ここで示す方法を定式化2と呼ぶ。

(1) 未知パラメタの設定

損傷点数を仮定し損傷位置とその損傷度を未知パラメタとする。例題のような1次元のモデルの場合にはひとつのパラメタで位置を記述できるので、 n_d 個の損傷点を仮定する場合の未知パラメタベクトル \mathbf{x} は次式のように大きさ $2n_d$ 次元のベクトルとなる。

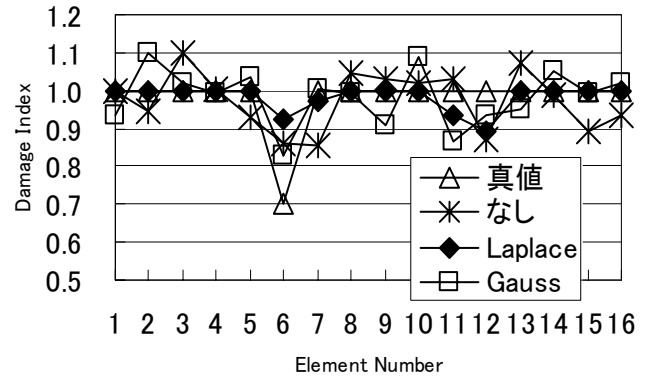


図-6 損傷1箇所ノイズ5%の損傷推定結果

$$\mathbf{x}^T = (p_1, b_1, p_2, b_2, \dots, p_j, b_j, \dots, p_{n_d}, b_{n_d}) \quad (21)$$

ここで、 p_j : 損傷位置を表すパラメタ、 b_j : 損傷度パラメタである。 $a_i^{(j)}$ を j 番目のパラメタの組 p_j, b_j だけから決まる計算過程の損傷度とし、以下の式で定義する。

$$a_i^{(j)} = \begin{cases} b_j + (1.0 - b_j) |i - p_j|, & i = k, k+1 \\ 1.0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

ここで、 $k=[p_j]$ であり、 $[p]$ は実数 p を超えない最大の整数値を表すガウス記号である。最終的な損傷度 d_i は $a_i^{(j)}$ を用いて以下の式で表される。

$$d_i = \prod_{j=1}^{n_d} a_i^{(j)} \quad (23)$$

j 番目のパラメタの組 p_j, b_j によって損傷が生じていることを表すことができるのは領域 k と $k+1$ だけであり、それ以外の領域の損傷度は全て 1.0 となっている。損傷位置を表す p_i と p_j の差が 1.0 以内であれば b_i と b_j が同じ要素の損傷度に影響を与える。たとえば、

$$\mathbf{x}^T = (p_1, b_1, p_2, b_2) = (4.5, 0.6, 5.0, 0.5) \quad (24)$$

とすると、要素4と5の損傷度は0.8、0.4となり、それ以外の要素の損傷度はすべて1.0となる。つまり、 n_d 個の損傷点を仮定しても損傷位置を表すパラメタ p の値が近ければ、損傷箇所が n_d 個よりも少ない状態も表すことができる。

(2) AICに基づく目的関数

観測情報が式(2)、(3)で与えられ、事前情報は考慮しない場合についても、尤度関数に-2を乗じて次の目的関数が求められる。

$$J = (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) + m \ln(2\pi) + \ln|\mathbf{R}| \quad (25)$$

式(4)の目的関数と比較すると事前情報に関する項を取り除いた式となっていることがわかる。

上記目的関数の最小化から未知パラメタ \mathbf{x} に関する最

尤推定量を求めることができる。しかし、ここでの未知パラメタの定式化では損傷点数をあらかじめ決める必要があるが、損傷点数を多くすればするほど目的関数が小さくなる傾向があることから(少なくとも大きくなることはない)、損傷点数を決めるための基準が必要となる。そこで、モデルの良さを測るための基準である情報量基準を導入する。目的関数の最小値、すなわち最大対数尤度が求められると次式により AIC (Akaike Information Criterion) や MDL (Minimum Description Length) といった情報量基準^{16,17}が求められる。

$$AIC = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + 2 \times (\text{自由パラメタ数}) \quad (26)$$

$$MDL = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + \ln m \times (\text{自由パラメタ数}) \quad (27)$$

第1項がモデルのデータへの当てはまりの良さを表し、第2項はモデルのパラメタ数を増やすことに対するペナルティを意味している。一般にパラメタ数が多い複雑なモデルは自由度が高いため、データへの追従性も高くなり、第1項は小さくなる。従って、第2項で評価するモデルの複雑化に伴うペナルティを課した上で全体を減少出来ない限り、それ以上、モデルを複雑にすべきでないと判断していることになる。AIC でも MDL でも似たような結果となったので、後述の数値計算例では土木工学の分野で使われることが多い AIC による結果を示す。

情報量基準を適切に評価するには観測量誤差のレベルもあわせて推定することが必要となるため、以下のように全体的レベルを規定する c を導入する。

$$\mathbf{R} = c \mathbf{R}_0 \quad (28)$$

ここで、 \mathbf{R}_0 は適当に定めた共分散行列であり、 c は不確定性の全体レベルを表す値である。例えば、各観測量誤差が同程度で互いに独立である場合は \mathbf{R}_0 を単位行列とすることができ、 c は誤差の分散の大きさを表すことになる。式(28)を式(25)に代入して次式を得る。

$$J = \frac{1}{c} J' + m \ln(2\pi) + m \ln c + \ln |\mathbf{R}_0| \quad (29)$$

$$\text{ここで、} J' = (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}_0^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))$$

パラメタ c について J を最小化する条件から次式の関係を得ることができる。

$$\frac{\partial J}{\partial c} = -\frac{J'}{c^2} + \frac{m}{c} = 0 \quad (30)$$

これを変形して次式を得る。

$$c = \frac{J'}{m} \quad (31)$$

式(31)の関係を式(29)に代入すれば次式が求まる。

$$J = m + m \ln(2\pi) + m \ln \left(\frac{J'}{m} \right) + \ln |\mathbf{R}_0| \quad (32)$$

式(32)において推定したいパラメタに関係するのは J だけであり、 $\ln(\cdot)$ が単調増加の関数であることを考えると、 J' が最小化されていけば J も最小化されることになる。以上より、最小二乗問題 J を解けば、式(31)の関係からパラメ

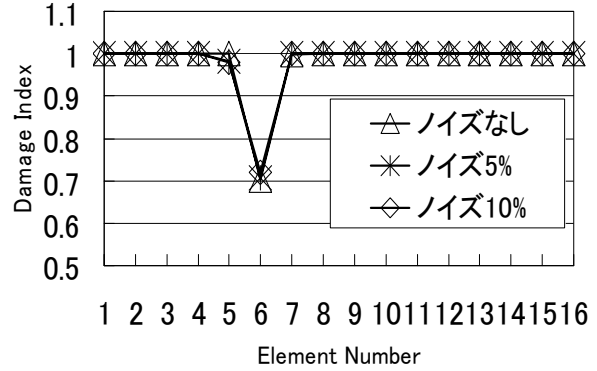


図-7 損傷1箇所 ノイズの損傷推定結果への影響

タ c の値が、さらに、式(32)から最小化された J が求められる。さらに、最小化された J に -2 を乗じると最大対数尤度となるため、これを式(26)あるいは(27)に代入すると AIC や MDL を算定することができる。自由パラメタ数とは推定するパラメタの数なので、損傷程度や位置に関するパラメタが $2n_d$ 個、不確定性を表すパラメタ c が 1 個、計 $2n_d+1$ が自由パラメタ数となる。

損傷点とその損傷程度を推定する定式化2では局所解が多数存在する多峰性の問題となるため大域解探索手法が必要となる。本研究では最適化手法として遺伝的アルゴリズムを用いる^{18,19}。

5. 損傷度推定の数値計算例

3. (5) で良好な結果が得られなかったケース、すなわち損傷位置が要素6の1箇所損傷度が0.7、その他の要素は全て1.0、ノイズが5%の場合について4章で述べた定式化2を用いて損傷度分布の評価を行なった。想定する損傷点数は1点とした。比較のためノイズを与えないケース、10%としたケースについても計算を行った。得られた損傷度の分布を図-7に示す。ノイズが大きくなるにつれて真値からのずれが大きくなる傾向があるが、その誤差は大変小さくいずれのケースも非常に良好な結果が得られている。10%のノイズを考慮した場合にも良好な結果が得られており、損傷位置及びその程度が適切に推定されている。

次に定式化上想定する損傷点数を1, 2, 3, 4として同様の計算を行った。ノイズは5%とした。その結果を図-8に示す。この場合も非常に良好な結果が得られており、想定した損傷点数に関わらず損傷位置とその程度が適切に推定できていることがわかる。各ケースの AIC の比較を図-9に示す。想定した損傷点数を1としたケースの AIC が最小となっており適切にモデル選択がされている。

次に真の損傷点数を3点した場合について同様の検討を行なった。損傷要素は3, 6, 8で損傷度はそれぞれ0.7である。ノイズは5%、定式化上想定する損傷点数は1, 2, 3, 4とした。想定する損傷点数が1, 2の場合の推定結果を図-10に、3, 4の場合の図-11に示す。当然のことながら想定した損傷点数が1の場合は良い結果が得ら

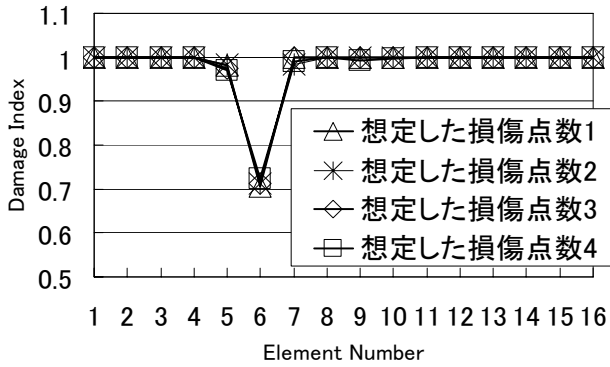


図-8 損傷1箇所ノイズ5%の損傷推定結果
(想定した損傷点数1~4)

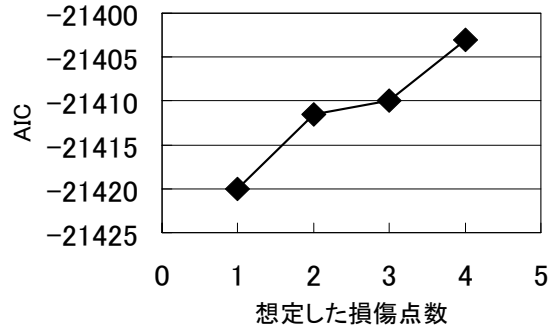


図-9 AIC と想定した損傷点数の関係
(損傷点数1点)

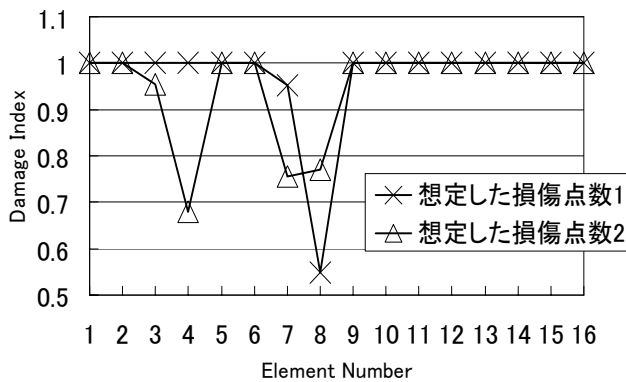


図-10 損傷3箇所ノイズ5%の損傷推定結果
(想定した損傷点数1,2)

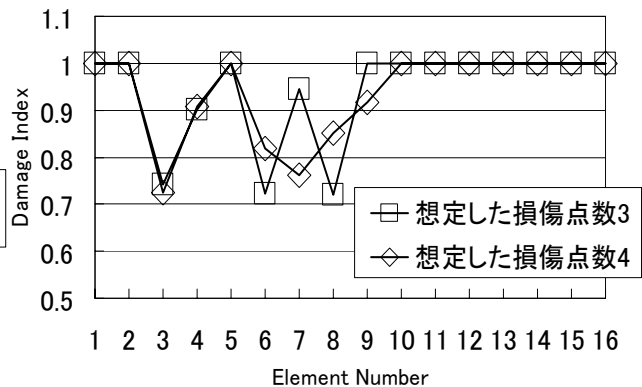


図-11 損傷3箇所ノイズ5%の損傷推定結果(想定した損傷点数3,4)

れていないが、損傷点数が2の場合は損傷位置が3から4へ、6、8から7、8へとずれてはいるものの、少ない損傷点数で全体挙動が近くなるように調整していると想像され、大まかな推定は可能となっている。一方、損傷点数を3とした場合は、損傷位置、損傷程度がほぼ適切に推定されている。損傷点数が4になると要素3はほぼ適切に推定されているものの、要素6から9ぐらいにかけて全体的に低下している。図-12にこれら4ケースのAICの比較を示す。図中(1)では4ケースの比較を示しているが、2、3、4の違いが明確ではないため、(2)に拡大した図を示す。損傷点数3点の場合が最小となっており、このケースにおいても適切に損傷点数が推定できていることがわかる。しかし、3と4の違いは微小でありその差は必ずしも明確ではない。

6. まとめ

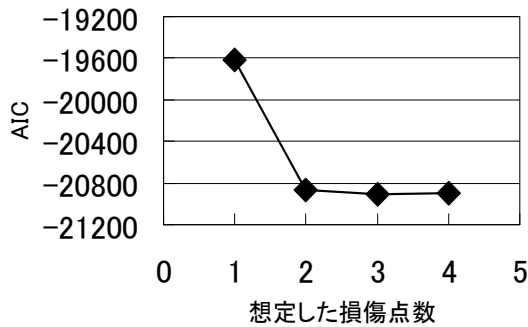
本研究では逆問題における非適切性の緩和の方法について述べ、その数値解析例を示した。その主な結論として以下を挙げることができる。

- 1) 事前情報から全体的に変化している場合にはラプラス型よりガウス分布型の事前情報が有効であった。
- 2) 特定の箇所が事前情報から変化している場合はガウ

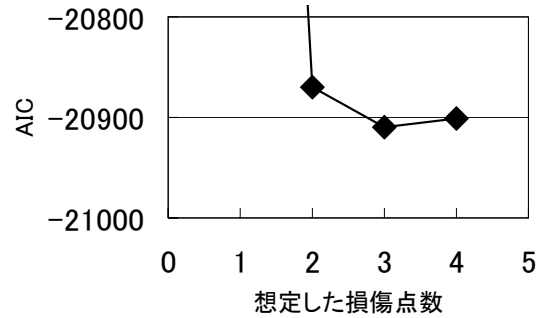
ス分布型よりラプラス型の事前情報が有効であった。ただし、損傷箇所数が多くなると不安定になった。また、観測ノイズの影響も大きく、ノイズレベルが大きいと推定結果が不安定になった。

- 3) ガウス分布型、ラプラス型ともに最尤法から事前情報と観測情報の不確定性レベル、すなわち、重みを適切に決めることができた。
- 4) 全領域の損傷度を評価する定式化1(2章)に比較して、損傷点位置とその損傷度を推定する定式化2(4章)では、損傷点数が複数ある場合やノイズを加えた場合にも良好な推定が可能となり、大幅に性能を向上させることができた。このことは問題の特徴に合わせた解や事前情報の定式化が重要であることを示している。
- 5) 数値解析例では定式化2において、AICによるモデル選択の考え方から損傷点数も適切に推定できた。

本論文で示した数値解析例では定式化2を用いることで大変良好な結果が得られ、損傷位置、程度が適切に推定されたが、当然のことながら観測情報の質と量に応じて推定精度の限界がある。例えば観測ノイズをさらに大きくすると推定精度は悪くなる。しかし、AICによるモデル選択ではそうした場合には実際よりも少ない損傷点数が推定され、観測情報の質に応じて詳細な推定や大まかな推定が



(1) 4 ケースの比較



(2) 3 ケースの比較 (拡大図)

図-12 AIC と想定した損傷点数の関係 (損傷点数3点)

自動的に行われることになるという好ましい性質を有している。

今後の課題としては実験データを用いた検証が挙げられる。車両走行による橋梁の模型振動実験を既に実施しており、それを用いた手法の検証、改良を今後進めていく予定である。

参考文献

- 1) W. メンケ (訳 柳谷俊, 塚田和彦), 離散インバーズ理論, 古今書店, 1997.
- 2) 久保司郎: 逆問題, 培風館, 1992.
- 3) 北川源四郎: モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について, 統計数理, 第44巻第1号, pp.31-48, 1996
- 4) 吉田郁政, 豊田耕一, 星谷勝: 時間更新を考慮した逆解析と観測点配置の評価指数, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.271-280, 1996.
- 5) 吉田郁政, 佐藤忠信: 適応型モンテカルロフィルタを用いた損傷同定について, 土木学会論文集 No.759/I-67, pp.259-269, 2004.
- 6) 吉田郁政, 原数馬, 金哲佑, 川谷充郎: 交通振動を用いた橋梁の損傷推定に関する基礎研究, 応用力学論文集, Vol.9, pp.55-62, 2006.
- 7) 吉田郁政, 我妻克明, 天野由華: 損傷推定における事前情報の確率密度分布について, 第6回構造物の安全性・信頼性に関する国内シンポジウム, 講演論文集, 2007.
- 8) 吉田郁政, 佐々木卓也, 星谷勝: 拡張目的関数によるモデル化誤差の影響を考慮した逆解析, 応用力学論文集, pp.65-72, 1999.
- 9) 中川徹, 小柳義夫: 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1982.
- 10) 本城勇介: 講座・地盤工学における逆解析・5. 逆解析における事前情報とモデルの選択, 土と基礎, 43-7, 43-8, 1995.
- 11) Honjo, Y., S. Iwamoto, M. Sugimoto, S. Onimaru and M. Yoshizawa, Inverse analysis of dynamic soil properties based on seismometer array record by the extended Bayesian method, Soils and Foundations, Vol.38, No.1,

pp.131-143, 1998.

- 12) 川谷充郎, 山田靖則, 嶽下裕一: 三次元車両モデルによる桁橋の動的応答解析, 土木学会論文集, 第584号/I-42, pp.79-86, 1998.
- 13) Kim, C.W., Kawatani, M and Kim, K.B.: Three-dimensional dynamic analysis for bridge-vehicle interaction with roadway roughness, Computers and Structures, Vol.83/19-20, pp.1627-1645, 2005.
- 14) Kawatani, M., Kobayashi, Y. and Kawaki, H.: Influence of Elastomeric Bearings on Traffic-Induced Vibration of Highway Bridges, Transportation Research Record, No.1696, Vol.2, pp.76-82, 2000.
- 15) 嘉納秀明: システムの最適理論と最適化, コロナ社, 1987.
- 16) 下平英寿, 伊藤秀一, 久保川達也, 竹内啓, モデル選択, 統計科学のフロンティア3, 岩波書店, 2004.
- 17) 小西貞則, 北川源四郎, 情報量規準, 朝倉書店, 2004.
- 18) 三宮信夫・喜多一・玉置久・岩本貴司: 遺伝アルゴリズムと最適化, システム制御情報ライブラリー17, 朝倉書店, 1998.
- 19) 小林重信・小野功: 進化型計算に基づくシステム最適化, 計測と制御, 35/7, pp.508-513, 1996.

(2007年4月12日 受付)