

落石危険度評価のための混合ガウスモデルによる落石到達位置の評価

吉田郁政* 青山嵩* 中村晋**

Rockfall distribution estimated by Gaussian Mixture model for risk assessment

by

Ikumasa YOSHIDA*, Takashi AOYAMA* and Susumu NAKAMURA**

Behavior of rockfall is difficult to predict partially because of complicated terrain of natural slope. Progress of numerical simulation technique such as DEM (Discrete Element Method) permits prediction of down-slope movement of rock debris to some extent for arbitrary terrain. It is, however, not reasonable to predict how far the falling rocks reach and how seriously they affect structures in concern deterministically because large uncertainties are involved in the prediction including complicated terrain. This study proposes a method to assess the probability distribution of falling rocks with Gaussian Mixture Model (GMM) to consider complicated terrain. GMM is a model to express the complicated probability density function by superposition of several Gaussian distributions. The parameters of GMM are estimated by EM algorithm based on the numerical simulation result such as DEM. Severity of collision in addition to the collision probability is needed in order to assess the influence on the structures. Hazard curve with respect to residual distance, which is defined as the moving distance from the structure when the falling rock does not collide with it, is proposed and estimated.

Key words: Rockfall, Slope, Probability of collision, Gaussian mixture model, EM algorithm

1 緒 言

落石の予測には個別要素法や質点解析を用いる方法があり、多くの研究が報告されている^{1),2)}など。しかし、こうした落石の予測解析には大きな不確定性が伴い、斜面崩壊による岩塊や落石がどこまで到達するか、さらに構造物等へ与える影響の大きさについて確定的に評価することは容易ではない。そのため注目する構造物に対する衝突の確率などによりその危険性を評価することが好ましい。さらに、構造物等への影響を評価するには衝突確率だけではなく、衝突の激しさに関する情報も必要である。吉田ら³⁾は残存距離を構造物に衝突しない場合のさらなる移動量と定義して、残存距離とその超過確率に関するハザード曲線を提案している。残存距離とは、もしも岩塊が構造物に衝突しなければさらにどの程度移動していったかを表しており、衝突した際の衝撃力の大きさに関係した量となっている。こうした確率評価のためには落石の到達位置について確率分布を評価する必要がある。自然斜面のような任意の斜面形状を対象とする場合にはその確率密度分布も複雑になり、単純に正規分布や対数正規分布などでモデル化することには限界が生じる。そこで、本研究では混合ガウスモデル GMM (Gaussian Mixture Model) を用いた落石の確率密度分布を評価する方法について提案する。混合ガウス分布の平均、共分散、混合比などのパラメタの推定には

EM (Expectation and Maximization) アルゴリズム⁴⁾を用いる。

栃木による落石実験^{5),6)}が行われており、一個ずつ個別に岩塊モデルを斜面の上から落とした場合とまとめて同時に落とした場合の落石の到達位置の情報が得られている。この実験結果による落石の到達位置の確率分布の評価を行い、仮定した構造物への衝突確率や衝突の衝撃の強さとその関係を表す衝突ハザード曲線の評価を試みる。

2 落石危険度評価のための方法

2.1 GMM の推定のための EM アルゴリズム

実際の斜面は複雑な3次元構造をしている場合があり、崩壊した土塊の到達分布は地形に依存した複雑な形になることが容易に想像される。そうした場合は、単一の正規分布などによるモデル化³⁾では不十分である。複雑な特性を持った確率密度分布を表す手法として、複数のガウス型確率密度分布の和として表現する混合ガウスモデル GMM が知られており、その推定には EM アルゴリズムを用いる方法⁴⁾がある。本節では、その定式化を示す。

観測データ集合を $D = \{\mathbf{x}_j; j = 1, n\}$ として、次の関係があるとする。

+ 原稿受理 2015年4月10日 Received

* 東京都市大学都市工学科 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤1-28-1, Dept. of Urban and Civil Engr., Tokyo City Univ., 1-28-1 Tamazutsumi Setagaya-ku Tokyo 158-8557 Japan

** 日本大学工学部 〒963-8642 福島県郡山市田村町徳定字中河原1, College of Engineering, Nihon University, Nakagawara 1, Tokusada, Tamura Koriyama, Fukushima Pref. Japan 963-8642

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^m w_{ij} (\boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{v}_i) \quad (1)$$

\mathbf{x}_j は j 番目の観測量ベクトルであり、 n 次元とする。 \mathbf{v}_i は平均 0 の正規分布に従うベクトルであり、その共分散行列は \mathbf{R}_i とする。 また、 $\boldsymbol{\mu}_i$ は平均ベクトルとする。 各観測情報は m 個の正規分布のどれかに属し、観測誤差は互いに独立な正規分布とする。 w_{ij} はデータ j がどの正規分布に従うかを示しており、例えば、要素となるガウス分布が 3 つあり ($m=3$)、1 から 4 番目のデータがそれぞれ観測方程式の 2, 3, 2, 1 番目に従う場合は以下のようになる。

$$[w_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2)$$

m 個のガウス分布の混合比を d_i で表すと、その結合確率密度関は以下の式で与えられる。

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^m d_i \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{R}_i) \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\theta}$ は未知パラメータでガウス分布の平均ベクトルからなる。

$$\boldsymbol{\theta}^T = (d_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{R}_1, d_2, \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{R}_2, \dots, d_m, \boldsymbol{\mu}_m, \mathbf{R}_m) \quad (4)$$

$\mathbf{x}_i, \mathbf{R}_i$ は i 番目の平均ベクトルと共分散行列である。

$\phi(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{R})$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ 、共分散行列 \mathbf{R} の多変量正規分布の確率密度関数を表す。

$$\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (5)$$

混合比 d_i は以下の式で求められ、

$$d_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{ij} \quad (6)$$

次の関係をもつ。

$$d_i > 0, \sum_{i=1}^m d_i = 1 \quad (7)$$

EM アルゴリズムでは 2 種類のステップ、E ステップ (期待値, Expectancy) と M ステップ (最大化, Maximization) の反復計算より最尤推定値を求める。

E ステップとして仮定した $\boldsymbol{\theta}$ に対する対数尤度関数の期待値 Q を以下の式で求める。

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij} \ln(d_i \phi(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{R}_i)) \quad (8)$$

ここで、 n は観測データの数を表す。 また、 w_{ij} はベイズの考え方に基つき次式で推定する。 なお、問題設定上 w_{ij} は未知とするので、以下、記号 w_{ij} は期待値を表すとする。

$$w_{ij} = \frac{d_i \phi(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{R}_i)}{\sum_{k=1}^m d_k \phi(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{R}_k)} \quad (9)$$

次に M ステップでは Q 関数を各パラメータに関して最大化する。 Q 関数について式(1)に示した観測方程式の観測量誤差がデータ間で互いに独立な同じ正規分布に従う (i.i.d.) と仮定して具体的に書き下すと以下の式が得られる。

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij} \left((\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i) \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij} \left(-2 \ln(d_i) + \ln|\mathbf{R}_i| + \ln(2\pi) \right) \quad (10)$$

共分散行列の逆行列 \mathbf{R}^{-1} について、次の条件を満たす必要がある。

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{R}_i^{-1}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

この条件より以下の次式が誘導される。

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{R}_i^{-1}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_{ij} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i) (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i)^T + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (12)$$

ここで、 \mathbf{R}_i が正則かつ対称であることから次の関係があることを用いて式(12)を誘導している。

$$\frac{\partial \ln|\mathbf{R}_i|}{\partial \mathbf{R}_i^{-1}} = -|\mathbf{R}_i| \frac{\partial |\mathbf{R}_i^{-1}|}{\partial \mathbf{R}_i^{-1}} = -|\mathbf{R}_i| \mathbf{R}_i \frac{1}{|\mathbf{R}_i|} = -\mathbf{R}_i \quad (13)$$

したがって、次式により共分散行列 \mathbf{R}_i が求められる。

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_{ij}} \sum_{j=1}^n w_{ij} \left((\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i) (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i)^T \right) \quad (14)$$

同様にして平均値ベクトルについても次のように誘導される。

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_i) = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\mu}_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_{ij}} \sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{x}_j \quad (16)$$

以上の E ステップと M ステップを繰り返すことで解を得ることができる。ここでは収束計算の停止則として、以下の式のように対数尤度関数の変化率がある一定値 ε 以下になる条件とする。

$$\left| \frac{\ln(L^{k+1}) - \ln(L^k)}{\ln(L^{k+1})} \right| < \varepsilon \quad (17)$$

ここで、 $\ln(L^k)$ はイタレーション k 回目の対数尤度関数を表しており以下の式で求められる。

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{j=1}^n \ln \left(\sum_{i=1}^m d_i \phi(z_j; \mu_{ij}, \sigma_i) \right) \quad (18)$$

以上の定式化は回帰式の数 m を仮定して推定を行う問題を対象としており、最適な m を求めることを考えるとさらにモデル選択のための方法が必要となる。モデル選択とは複数のモデル候補からデータに照らし合わせて適切なものを選ぶことであり、そのための指標としていくつかの情報量基準が提案されている。本問題でのモデル候補として m が1のものから複数のものまでを考えて情報量基準が最小となるモデル、すなわち m を選択する。情報量基準としてはBIC (MDLとしても知られている)を用いる⁷⁾。

$$\text{BIC} = -2\ln(L(\theta)) + \ln(n)n_h \quad (19)$$

ここで、 n_h はハイパーパラメタの数であり、最適化の対象となるパラメタの数である。

似たような理論的な枠組みによる方法、すなわち、EMアルゴリズムを用いて多数の橋梁の点検データから複数の劣化曲線を推定し、その曲線の個数は情報量基準から決める方法が提案され、良好な結果が得られることが報告されている⁸⁾。

2.2 衝突確率と残存距離ハザードの算定方法

注目する施設への落石一つ当たりの衝突確率については次式で算定する。

$$P_1 = \int_{\Omega} p(x, y) dx dy \quad (20)$$

ここで、 $p(x, y)$ は落石の到達位置座標に関する確率密度分布である。積分領域 Ω についてはFig.1(1)に示すように落石の崩壊領域の中心から直線で対象構造物への衝突経路を仮定して、その背後の領域とした。背後の領域は全て積分の対象領域となるが、ある程度大きな領域を積分しておけば実質上は十分である。図のように左右そ

れぞれ d_a の線分を設けて4角形の積分領域とし、 d_a は十分に大きな長さとする。式(20)は2次元の積分問題でありどのような方法で積分してもよいが、後述する残存距離ハザードの計算に適しているため有限要素の4角形要素の内挿関数^{例えば9)}を用いて積分を行った。詳細については吉田ら⁹⁾を参照されたい。岩塊が n 個落ちてくる場合は、互いに独立と仮定すると少なくとも一つ以上の岩塊が衝突する確率を次式で算定することができる。

$$P_n = 1 - (1 - P_1)^n \quad (21)$$

本研究では、残存距離に対応して求められる確率の曲線を残存距離ハザードと定義する。残存距離とは、もし岩塊が構造物に衝突しなければさらにどの程度移動していたかを表しており、衝突した際の衝撃力の大きさに関係した量となっている。Fig.1(2)に示す領域の積分を行うことで残存距離 d に対応する超過確率を算定することができる。崩壊領域の中心から伸ばした直線の方向が局所座標 s であるため、残存距離 d に対する衝突確率は局所座標 s に関して $[-1+2d/d_a, 1]$ の領域を積分した値となり、残存距離 d に対応した確率 $P(d)$ 、すなわち残存距離ハザード曲線を簡単に求めることができる。

$$P_1(d) = \int_{-1+2d/d_a}^1 \int_{-1}^1 p(r, s) |J| dr ds \quad (22)$$

残存距離は必ずしも衝突の際の衝撃力やエネルギーとの関係が明確ではないため、将来的には衝突速度と残存距離の関係を実験などによりモデル化し、衝突速度に関するハザード曲線に変換することを予定している。

3 既往の実験結果に対する適用

3.1 栃木による落石実験^{5), 6)}の概要

斜面崩壊後の岩塊の飛散分布特性を把握するため岩塊の崩落実験が実施された。20-30mm と 40-80mm の2種類のサイズの塊状岩塊について、単一岩塊の落下と岩塊群の崩落を行った結果の概要を示す。実験に用いた

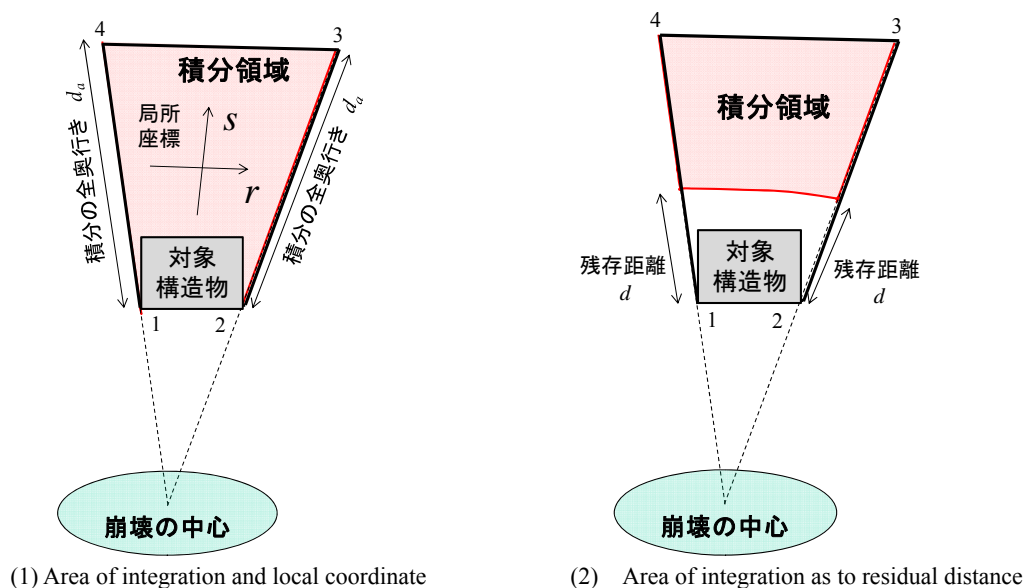


Fig.1 Area of integration to evaluate collision probability and falling rock hazard

20-30mm および 40-80mm の岩塊は Zingg の方法 による形状分類¹⁰⁾を実施し、岩塊の長辺長 a 、中間長 b および短辺長 c ($a > b > c$ の関係) の寸法比として定められる扁平率 c/b と細長率 b/a の大小により塊状を選定した。Fig.2 に示す実験装置を用いて、単一岩塊の落下実験と岩塊群 (崩落量 10kg, 50kg) の崩落実験が実施された。

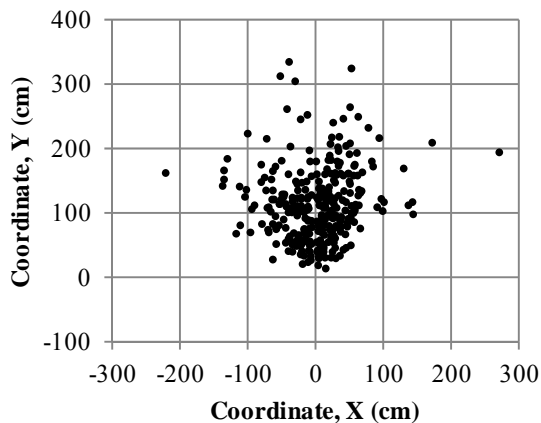
単一岩塊の落下実験では、20-30mm と 40-80mm の岩塊の中からそれぞれ代表 300 個を抽出し、ひとつずつ落下させたときの到達位置を記録している。岩塊は、ひとつ落下させた後にその岩塊を平板上から取り除いてから次の岩塊を落下させている。落下方法は、Fig.2 の斜面中央の法肩手前に岩塊の長辺が斜面傾斜方向に向くようセットし、指で少しずつ押し出して落下させる。岩塊は、数 cm 滑動したところで回転し始め、法尻まで滑動するケースはほとんどなかった。岩塊群の崩落実験では、Fig.2 のように所定の量を箱に入れ、図中に示す蓋を瞬時に開放することにより崩落させて岩塊群の到達位置を記録している。

本研究では Table 1 に示す 4 ケースを対象とする。ケース 1a と 1b は 40-80mm の塊状岩塊の個別と同時落下 (50kg)、ケース 2a と 2b は 20-30mm の塊状岩塊の個別と同時落下 (10kg) の実験である。使用する岩塊量 (重量) の記録はあるものの、崩落させた岩塊の個数のデータは残っていない。そこで、実験終了後の写真から岩塊個数を数えた結果を Table.1 に示している。

これら 4 ケースのうち紙面の都合上、1a と 1b の 2 ケースについて検討結果を示す。岩塊の到達位置の分布を

Table.1 Cases of falling rock experiment

Case	1a	1b	2a	2b
大きさ	40-80mm		20-30mm	
落とし方	個別	同時 50kg	個別	同時 10kg
個数	300	177	300	442

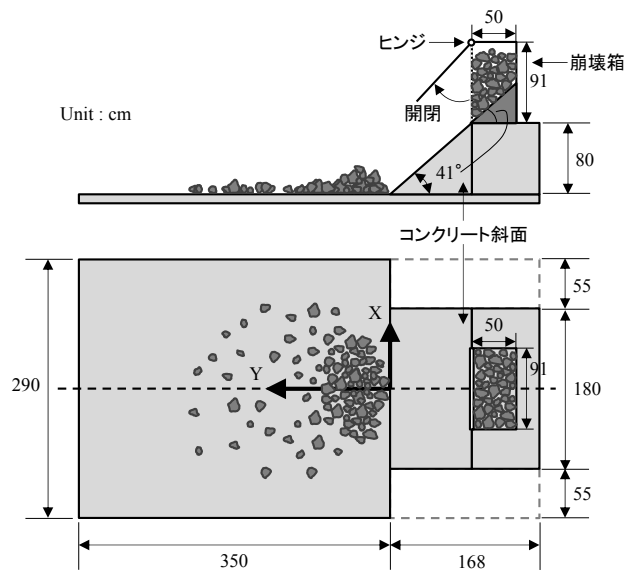


(1) Case 1a (40-80mm, individual fall)

Fig.3 に示す。個別落下と同時落下の違いの影響について注目すると、40-80mm、20-30mm とともに個別に落下させた方が遠くまで到達している。同時に落下させた場合は斜面の直下に集中して分布しており、一部重なっている。

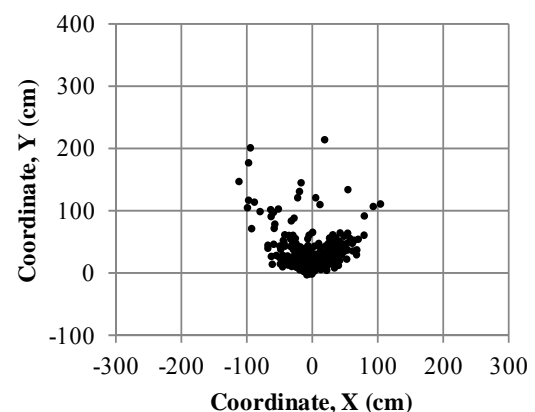
3.2 落石到達位置の確率分布の評価

岩塊の崩落実験結果について、2章で述べた GMM を用いた方法で岩塊の到達位置の確率分布を推定した結果を示す。前節に示した 4 種類の実験結果それぞれを対象とする。最初にガウス分布の足し合わせの個数を BIC から決める。個数を 1 から 9 までとした場合について BIC を求めた結果を Fig.4 に示す。図に 2 ケースしか示していないが、いずれの実験ケースについても 3 個の場合が BIC 最小となっている。EM アルゴリズムは局所探索の方法であるため、3 個、4 個など最小に近い個数



Case 1b size: 40-80mm, group of rocks: 50kg 10kg

Fig.2 Outline of falling rock experiment by Tochigi et al.⁵⁾⁶⁾



(2) Case 1b (40-80mm, group fall)

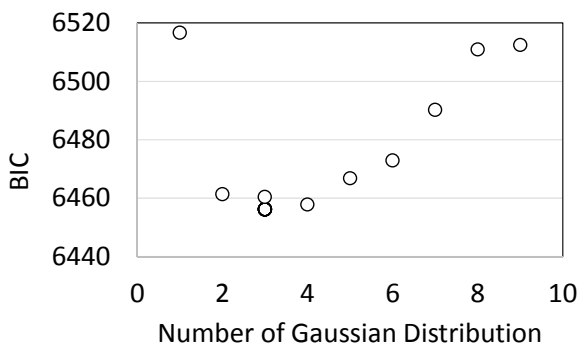
Fig.3 Distribution of falling rock obtained by experiment

に対しては、収束計算の初期値を決める乱数の種をかえて複数回の計算を行っている。足し合わせの個数に対して複数のプロットがあるのはこのためである。実験について、重ね合わせの個数が3個の場合について算定されたGMMによる確率分布をFig.5に示す。

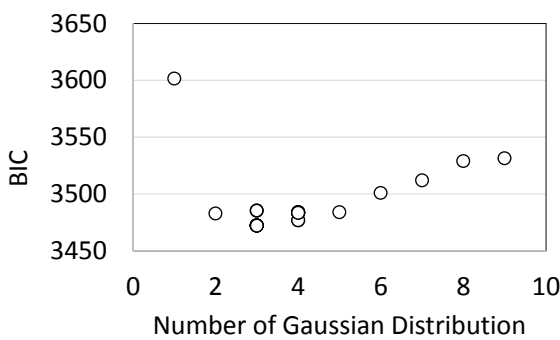
3.3 落石衝突ハザードの評価

適当な構造物を想定して残存距離ハザード曲線の算定例を示す。衝突確率算定のための積分領域を定めるために必要となる崩落中心の座標は(0, -92cm)とした。想定した構造物 A1, A2, A3 B1, B2, B3 を Fig.6 に示す。A群はY=150 位置でありB群はY=250 の位置に存在する。構造物の形状は考えずに長さ 50cm の一つの線分 (辺) として表し、その線分の背後の領域を積分して衝突確率を算定する。

各実験ケースについて残存距離ハザードの算定結果を Fig.7 に示す。縦軸は超過確率を表しており、残存距離 0 の場合の超過確率が衝突確率を表している。個別落下であれば 300 個、実験ケース 1b の個数は $n=177$ 個であり、図ではこのうちの 1 個以上が衝突する確率に関する残存距離ハザードを示している。残存距離が大きくなる、すなわち激しい衝突になるに従い超過確率が小さくなっている様子がわかる。当然のことながら斜面に近い

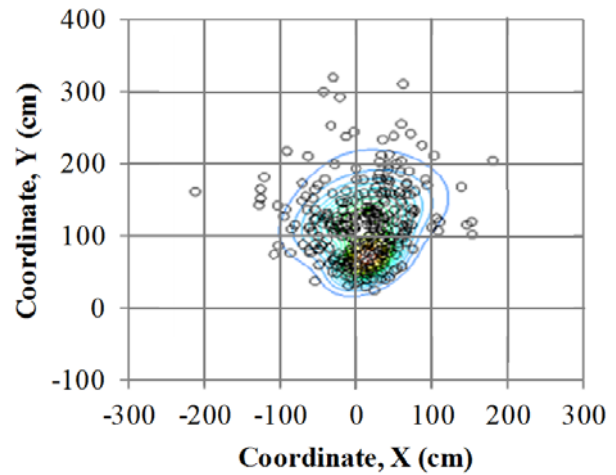


(1) Case 1a (40-80mm, individual fall)

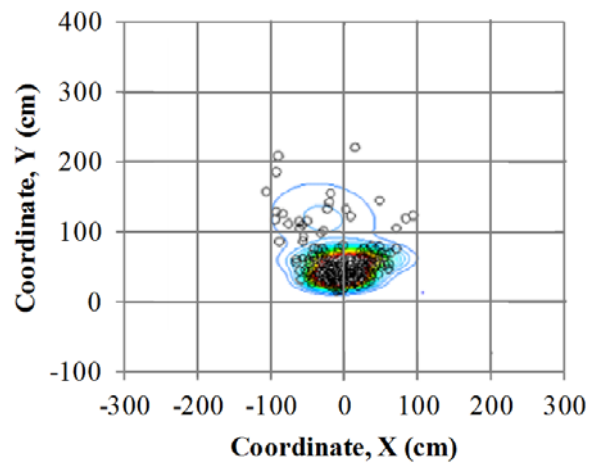


(2) Case 1b (40-80mm, group fall)

Fig.4 The number of superposition of Gaussian distribution (GMM) and BIC (B information criteria)



(1) Case 1a (40-80mm, individual fall)



(2) Case 1b (40-80mm, group fall)

Fig.5 Probability density distribution estimated by GMM for each experimental result

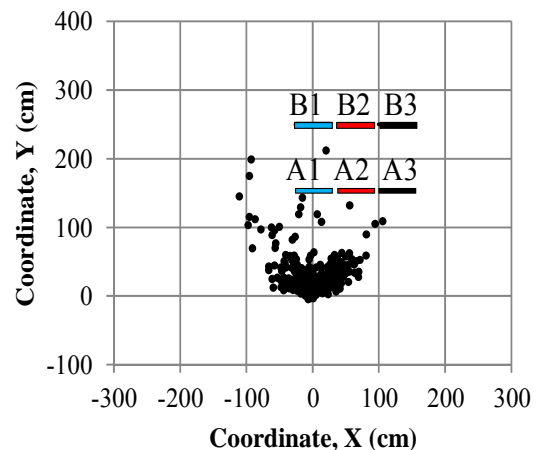


Fig.6 Structures for estimation of rock-fall hazard

Aの方が、また、中心位置に近い1の方が、全体的に衝突確率が大きくなっている。このように斜面と注目する構造物の位置関係に応じて残存距離ハザード曲線を評価することができ、残存距離に対応した衝突確率を評価することができる。

4 おわりに

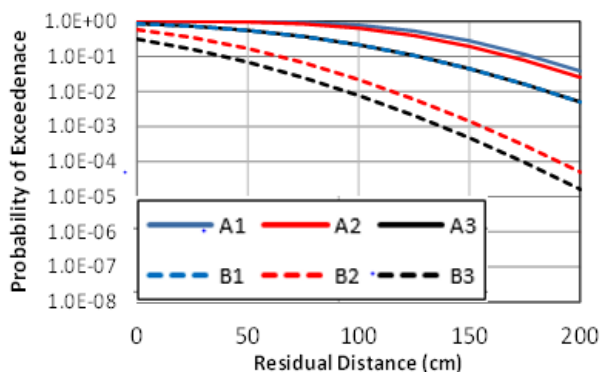
本報告では一般的な地形を対象とすること想定し、落石の到達位置に関して混合ガウスモデル GMM(Gaussian Mixture Model)を用いてモデル化し、その推定法としてEM(Expectation and Maximization)アルゴリズムを用いる方法を提案した。既往の実験結果を対象に落石が構造物へ与える危険性を残存距離ハザードとして評価する例を示した。ただし、低確率領域はGMMの個数などにも依存するため適用限界や精度も評価することも必要かもしれない。

今後の主な課題として次の2つを考えている。一つ目は衝突ハザードの指標である。残存距離は衝突の際の衝撃の大きさと同様関係はあるものの必ずしも使いやすい指標ではない。衝突の際の速度の方が扱いやすいが、そのためには衝突速度と残存距離の関係をモデル化する必要がある。もう一つの課題は全確率の評価方法である。ここで示した方法は落石が生じた場合の条件付き確率の評価法であり、条件付きハザードである。全確率として地震時の斜面崩壊に伴う崩壊岩塊の構造物への衝突ハザードを評価するには、地震発生に関するハザード、斜面崩壊の評価、落石の評価、本研究で示した条件付きハザードを組み合わせて総合的に評価する必要がある。こうした全体フレームの構築を現在進めているところであり、その中の一部として今回報告した。

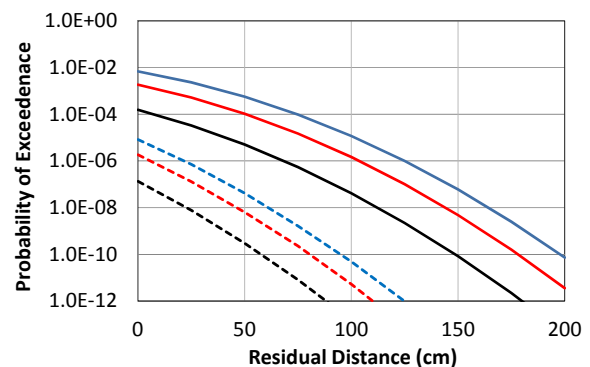
なお、本研究は原子力規制庁からの委託業務として実施したものである。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 表真也, 西弘明, 今野久志, 伊東佳彦, 日下部祐基, 前田健一: 実測値を用いた二次元個別要素法の落石解析パラメータに関する検討, 第39回岩盤力学に関するシンポジウム講演集, pp.346-351, 2010.
- 2) 右城猛, 筒井秀樹, 加賀山肇: 落石の運動特性と現行の運動予測法の問題点, 第5回地盤と環境に関するシンポジウム, pp. 1-10, 2009
- 3) 吉田郁政, 内藤直人, 中瀬仁: 斜面崩壊による岩塊や落石の衝突ハザードの評価法落石ハザード評価に関する提案, 土木学会論文集(地震工学), 2015. (掲載決定)
- 4) 樺島祥介, 上田修功: 計算統計I, 第III部平均場近似・EM法・変分ベイズ法, 岩波書店, 2003.
- 5) 栃木均: 地震時崩落岩塊の到達距離に関する影響要因の検討-斜面崩壊を想定した振動台実験と二次元個別要素法解析による影響予測手法の開発, 電力中央研究所報告, N08084, 2009.
- 6) 栃木均: 地震時崩落岩塊の到達距離に及ぼす岩塊の大きさと形状の影響, 電力中央研究所報告, N09021, 2010.
- 7) 小西貞則, 北川源四郎: 情報量基準, 朝倉書店, 2004.
- 8) 吉田郁政, 本城勇介, 大竹雄: EMアルゴリズムを用いた劣化曲線群の同定法, 土木学会論文集A1(構造・地震工学), Vol.69, No.2, 174-185, 2013.
- 9) K.J.Bathe, E.L.Wilson(菊池文雄 訳): 有限要素法の数値計算(計算力学シリーズ), 科学技術出版, 1979.
- 10) 地盤工学会: ロックフィル材料の試験と設計強度, pp.88-90, 19



(1) Case 1a (40-80mm, individual fall)



(2) Case 1b (40-80mm, group fall)

Fig.7 Collision probability and hazard curve of falling rock for each assumed structures